TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

DONGXI SHUXUE WUYU

[日本] 平山 谛 著

代 钦 译

上海教育出版社

东西数学物语

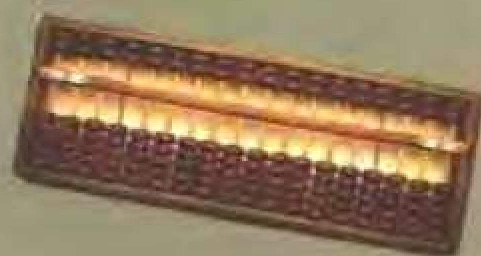
VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

责任编辑 叶中豪

东西数学物语

DONGXI SHUXUE WUYU



01-49
30

东西……物语

[日本] 平山 谛 著　代 钦 译 • 上海教育出版社



图书在版编目（CIP）数据

东西数学物语／（日）平山谛著；代钦译．—上海：上海教育出版社，2005.3
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7 5320 9640-8

Ⅰ.东… Ⅱ.①平…②代… Ⅲ.数学—普及读物
Ⅳ.01 49

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第018855号

平山谛
东西数学物语
©恒星社厚生阁
根据恒星社昭和53年增补2版译出

通俗数学名著译丛
东西数学物语
［日本］平山谛 著
代钦 译 李迪 审校

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行
易文网：www.ewen.cc
（上海永福路123号 邮政编码：200031）
各地新华书店经销 昆山市亭林印刷有限责任公司印刷
开本850×1156 1/32 印张15.75 插页4 字数374,000
2005年3月第1版 2005年3月第1次印刷
印数 1-5,000本
ISBN 7-5320-9640-8/O·0033 定价：(软精)28.00元

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位. 数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献. 同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志. 因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学. 现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路. 面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步. 这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础. 随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视. 早在60年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今. 改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力. 但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距. 我国数学要率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多彩.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.值得高兴的是,这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持,特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词,使我

们深受鼓舞.到目前为止,这套丛书已出版了13种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷,这对编译者来说确是令人欣慰的信息.我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

2001年8月

译者前言

《东西数学物语》的作者平山谛博士(1904.8—1998.6)是日本著名数学史家,被誉为和算史研究的泰斗,他编辑或撰写的著作颇丰,《增修日本数学史》、《和算研究集录》、《明治前日本数学史》、《关孝和全集》、《关孝和》、《和算的诞生》、《安道直圆全集》、《松永良弼》、《方阵的研究》、《圆周率的历史》、《和算史上的人们》、《和算的历史》、《东西数学物语》等重要著作对数学史和数学教育研究产生了极大影响.

《东西数学物语》是集数学历史典故、故事、游戏、趣味图形和计算题为一体的科普著作,从古代中国、西方、印度和日本等国家的数学史文献中精选了300多道经典问题,同时对不同国家的同类问题进行了比较,并尽可能地考证了有关问题.该书是数学教育和数学史研究的珍贵资料.但是,由于作者的历史条件的局限性,原著中也存在有些年代和观点方面的错误.在翻译中纠正了这些错误.

原著的有些内容是根据日本语发音编写的,无法翻译.在翻译时删除了这些内容,如第2章第2节、第9节的第4、5、6、7部分内容、第3章第7节的内容、第3章第9节.此外,在保持原著内容的情况下对极少数难度较大的古文献进行了技术处理.把原著的"增补订正"部分以适当的方式加进了相应的章节中.由于水平有限,在翻译中难免出现错误,恳请广大读者不吝赐教.

本书的翻译和出版得到了日本大阪教育大学松宫哲夫教

授、平山谛博士亲属平山智启先生、平山谛博士的弟子铃木武雄先生和株式会社-恒星社厚生阁社长佐竹久男先生的大力帮助和支持.

著名数学史专家李迪教授对全书进行了审阅,并作了不少注解,给本书增添了光彩.

对本书的校稿,金色老师和王晓霞、李春兰、张慧萍、孔建霞同学提供了很大帮助。

谨向以上各位先生表示衷心的感谢.

译　者

序

我国数学史上的奇才久留岛义太曾经说过:“算法中最难的是提出问题,其次就是实施方法.”最近职业数学家的问题的泛滥,常常让人们忘记在历史上曾经推动今日数学教育的好问题.为排除这个忧虑,首先从古今杰作中甄选出初等数学问题,并加以详细解说.书中收集了古今趣味故事.由于喜好古典原著的缘故,所引用的文献难免冗长繁多.

对中国和我国的古典原著能够追溯考察,对西方的问题未能完全做到.尽管如此,还是尽可能地收集了丰富的资料.倘若拙著能成为我国数学教育的新文献,那就是格外庆幸的了.

虽然以章节分类是一件很勉强的事情,但为了便于使用,以物语、图形、计算为标准分章了.遗漏的和不足的内容将在该书的续编中另行介绍.

作为著作,这是第一次的尝试.为该书的更完美,恳请读者提出批评和忠告.

这里没有多少涉及关于纵横图和圆周率历史.因为笔者已有《话纵横图》(1954 年)和《圆周率的历史》(1955 年)两部著作.

我开始构思本书的时候,同行浦田繁松氏给予鼓励和帮助,详细阅读了原稿,并修改润色,付出了很多劳动.现在能够见到拙著的出版,受恩于浦田氏.难以用语言表达感激之情.

另外,对于该书的记述给予关心的大矢真一、泉行藏、野口

泰助、广濑秀雄、一松信、浦田繁松、加藤国一郎、铃木昭雄、高木茂男、下平和夫等诸位先生的增补修订附在书尾. 这里向他们表示感谢!

平山谛

昭和48年10月30日

献给诸位学生

我们出版本书的目的之一就是为了比较迄今为止还没有完全明白的西方、中国和日本的算术和数学.

然而,还有比这个更重要的方面.不管东方还是西方,两千年以来数学一直被人类所喜爱.诚然这不是为了考试,也不是为了单纯的应用,而是因为人类有追求真理、提高教养的欲望所致.于是数学就成了文化的一个基准.

我们现在正在构筑着新的文化.我们必须从我们自身内部探寻它的原动力.我们的祖先以何种方式数学地思考问题,该书中将说明这一点.

我殷切地希望,该书不仅对于学习理科的学生,而且对于有志于学习文科和法学的学生,也能够成为其精神食粮,并为新文化建设助一臂之力.

平山谛

昭和31年9月2日

目　录

第 1 章　物语 I …… 1

第 1 节　继子立 …… 1

1."继子立"的含义 …… 1

2."继子立"的历史 …… 3

3.西方"继子立" …… 4

4.问题的本质 …… 7

5.捉迷藏游戏 …… 13

6."继子立"的变形 …… 14

7.计子算 …… 18

第 2 节　药师算 …… 21

1.药师算的原形 …… 22

2.变形的药师算 …… 23

第 3 节　左左立 …… 26

第 4 节　分油的计算问题 …… 29

1.日本的分油问题 …… 29

2.问题的历史和存在的问题 …… 31

3.西方的问题 …… 33

4.问题的展望 …… 36

第 5 节　岛立和十不足 …… 37

1.岛立 …… 37

2.十不足 …… 39

第 6 节　狼之渡船 …………………………………… 40
第 7 节　乌鸦算问题 ………………………………… 42
第 8 节　倍增问题 …………………………………… 44
1. 曾吕利新左卫门 ………………………………… 44
2. 吉田光由的问题 ………………………………… 46
第 9 节　鹤龟算 …………………………………… 48
1. 鹤龟算的历史 …………………………………… 48
2. 鹤龟算的变形 …………………………………… 49
第 10 节　鼠算 ……………………………………… 50
1. 鼠算 ……………………………………………… 50
2. 斐波那契级数 …………………………………… 53
第 11 节　斐波那契级数 …………………………… 54
1. 花的旋涡 ………………………………………… 54
2. 枝条的开度 ……………………………………… 55
第 12 节　百鸡问题 ………………………………… 56
第 13 节　三人骑两匹马 …………………………… 59
第 14 节　百五减算 ………………………………… 61
1. 百五减算的原形 ………………………………… 61
2. 百五减算的变形 ………………………………… 63
第 15 节　谜语之算 ………………………………… 66
第 16 节　骰子游戏 ………………………………… 73
第 17 节　约数的检验 ……………………………… 75

第 2 章　物语 II …………………………………… 77
第 1 节　关于九九 ………………………………… 77
1. 九九的顺序 ……………………………………… 77
2.《万叶集》与九九 ……………………………… 80
第 2 节　数学之歌 ………………………………… 83
1. 因归算歌 ………………………………………… 84

2. 中国数学书中的歌诀 …………………………… 87
3. 印度数学书中的歌诀 …………………………… 90
第 3 节 嵌套问题的计算 ………………………… 91
1. 嵌套问题的计算 ……………………………… 91
2. 在长崎购物 …………………………………… 94
3. 父母遗留的银子 ……………………………… 95
第 4 节 小偷偷和服 ……………………………… 95
第 5 节 小偷的隐藏 ……………………………… 97
第 6 节 鸳鸯游戏…………………………………… 100
1. 日本的文献 ………………………………… 100
2. 泰特问题 …………………………………… 102
3. 林鹤一的解 ………………………………… 106
第 7 节 印度问题…………………………………… 107
1. 芒果问题 …………………………………… 108
2. 旅行者和马铃薯 …………………………… 108
3. 马铃薯和小偷 ……………………………… 109
4. 驴和葡萄酒 ………………………………… 109
5. 羊的分配 …………………………………… 110
6. 钻石的分配 ………………………………… 110
7. 农夫和鸡蛋 ………………………………… 112
8. 筐子里的苹果 ……………………………… 113
9. 毕达哥拉斯定理 …………………………… 113
第 8 节 填数字……………………………………… 115
1. 方阵卡 ……………………………………… 115
2. 二进制 ……………………………………… 116
3. 八卦原理 …………………………………… 118
第 9 节 遗题继承…………………………………… 119
1. 遗题继承的开始 …………………………… 120
2. 关孝和 ……………………………………… 123

第 10 节　算额 …… 125
1. 神璧算法 …… 125
2. 算额的开始 …… 125
3. 算额习惯 …… 126
4. 作为道场的神社佛阁 …… 128

第 3 章　物语Ⅲ …… 130
第 1 节　时刻法 …… 130
1. 东西时刻法的制度 …… 131
2. 王朝时代的时刻制度 …… 133
3. 江户时代的不定时法 …… 135
4. 记时的混乱 …… 140
第 2 节　东西方位的测定 …… 141
1. 班田制及其遗痕 …… 141
2. 条里的制度 …… 142
3. 东西方位的确定 …… 144
4.《周髀算经》的方法 …… 144
第 3 节　一升枡物语 …… 146
1. 现在的枡和古枡 …… 146
2. 古代的枡 …… 149
3. 数学著作中的枡 …… 150
第 4 节　关于汉数字 …… 151
第 5 节　命数法 …… 154
1. 西方的命数法 …… 154
2. 现行的命数法 …… 154
3. 古代中国的命数法 …… 156
4. 释迦的问答 …… 158
第 6 节　数学的语言 …… 160
1. 代数的语源 …… 161

2. 几何的语源 …… 162
3. 方程 …… 164
4. 商、实、法 …… 166
第 7 节 义经关于小孩的问答 …… 167
1.《算法童子问》中的问题 …… 167
2.《算法玉手箱》中的问题 …… 168
3. 西方的物语 …… 169
第 8 节 数学的名言 …… 171
1. 欧几里得和柏拉图 …… 171
2. 高斯 …… 172
3. 莱布尼兹 …… 172
4. 康德 …… 173
5. 拿破仑 …… 173
6. 笛卡儿 …… 173
7. 扎德 …… 173
8. 德·摩根 …… 174
9. 关孝和 …… 174
10. 久留岛义太 …… 175
11. 培根 …… 175
12. 牛顿 …… 176
13. 开尔文 …… 176
14. 麦克斯韦 …… 176
15. 霍布斯 …… 176
16. 西尔维斯特 …… 177
17. 爱因斯坦 …… 177
18. 艺术和数学 …… 177
19. 真理和数学 …… 178
20. 数学家的心境 …… 178

第 4 章　图形 Ⅰ …… 180
第 1 节　拼图问题 …… 180
1. 两个故事 …… 180
2. 中国的文献 …… 183
3. 中根彦循的问题 …… 185
4. 一般情形 …… 191
5. 用正五边形作长方形和正方形 …… 192
6. 鲁金的问题 …… 194
7. 从正方形到正方形 …… 197
8. 从正六边形到正方形 …… 199
9. 从十字架到正方形 …… 199
第 2 节　七巧板 …… 201
1. 西方七巧板 …… 201
2. 日本七巧板 …… 201
3. 中国七巧板 …… 205
第 3 节　折纸几何学 …… 208
1. 折正三角形的方法 …… 208
2. 以 AB 为斜边，作高为给定的直角三角形的方法 …… 208
3. 折正六边形的方法 …… 208
4. 折正八边形的方法 …… 209
5. 折黄金分割的方法 …… 209
6. 折正五边形的方法 …… 210
7. 用缎带作正五边形的方法 …… 211
第 4 节　圆规几何学 …… 211
1. 将线段延长 2 倍 …… 212
2. 求已知圆弧 AA' 的中点的方法 …… 212
3. 求三条线段 l,m,n 的第四比例项的方法 …… 213
4. 求线段 AO 的中点的方法 …… 214
第 5 节　椭圆问题 …… 215

第 6 节　填棋子游戏 …… 218
1. 填棋子游戏 …… 218
2. 枡形拾物 …… 220
3. “聪明”的和尚 …… 223
4. 八皇后问题 …… 223
5. 二人拾棋子的游戏 …… 225
第 7 节　角的三等分问题 …… 226
1. 三大难题 …… 226
2. 阿基米德的方法 …… 226
3. 用折尺作图 …… 227
4. 海尔梅斯的圆规 …… 228
5. 帕斯卡的研究 …… 229
6. 伸缩绘图器的方法 …… 229
第 8 节　七桥问题 …… 231
第 9 节　镶嵌图案 …… 235
1. 同种正多边形 …… 235
2. 大小不同的同类图形的组合 …… 235
3. 不同种类的正多边形的组合 …… 236
4. 图解 …… 238

第 5 章　图形Ⅱ …… 242
第 1 节　杉成算 …… 242
1. 问题的发生 …… 242
2. 问题的进展 …… 244
3. 垛术 …… 247
4. 关孝和的研究 …… 250
第 2 节　数列和图形 …… 253
1. 点列 …… 254
2. 方眼格纸的格 …… 256

3. 平方与立方 …… 258
第 3 节　毕达哥拉斯定理 …… 261
1.《周髀算经》 …… 261
2. 日本的毕达哥拉斯定理 …… 263
3. 计算证明方法 …… 267
第 4 节　毕达哥拉斯数 …… 268
1. 毕达哥拉斯数 …… 268
2. 毕达哥拉斯数的求法 …… 269
3. 毕达哥拉斯数的余枝 …… 271
第 5 节　三边和面积为整数的三角形 …… 280

第 6 章　计算 I …… 286
第 1 节　算盘史话 …… 286
1. 算盘 …… 286
2. 什么时候开始使用算盘的? …… 287
3. 中国算盘的发明 …… 289
4. 算盘和阿巴卡斯(Abacus) …… 289
5. 珠算的除法“九九” …… 291
6. 二珠算盘 …… 293
7. 商除法 …… 294
8. 16 除的“九九” …… 296
第 2 节　算筹和算盘 …… 297
1. 结绳 …… 297
2. 算筹 …… 297
3. 算木与算盘 …… 299
4. 在日本的传播 …… 302
第 3 节　开平方的方法 …… 304
1. 算盘与算筹 …… 304
2. 算盘开平方 …… 306



3. 用算盘解 2 次方程 …………………………………… 310
4. 木匠的开平方法 …………………………………… 311
5. 女子平方 …………………………………… 313
第 4 节　对数史话…………………………………… 316
1. 对数表的用途 …………………………………… 316
2. 安岛直圆的对数 …………………………………… 317
3. Briggs 和 Bürgi …………………………………… 320
4. 对数的引入 …………………………………… 323
5. 各种对数表 …………………………………… 323
第 5 节　三角函数史话…………………………………… 326
1. 古代的函数表 …………………………………… 327
2. 文艺复兴 …………………………………… 328
3. 在中国的传播 …………………………………… 329
4. 在日本的传播 …………………………………… 331
5. 日本的三角函数表 …………………………………… 331
第 6 节　虫食算…………………………………… 335
1. 虫食算 …………………………………… 335
2. 虫食算的趣味性 …………………………………… 336
3. 虫食算的代表作 …………………………………… 338

第 7 章　计算Ⅱ…………………………………… 343
第 1 节　素数…………………………………… 343
1. 埃拉托塞尼的筛子 …………………………………… 343
2. 孪生素数 …………………………………… 345
3. 素数的个数 …………………………………… 346
4. 梅森数 …………………………………… 348
5. 素数的连乘数及其与 1 的和与差 …………………………………… 350
6. 关于素数的猜想 …………………………………… 351
7. 业余爱好者 …………………………………… 353

第 2 节　循环小数……………………………………… 354
1. 素数的倒数 ……………………………………… 354
2. 合数的倒数 ……………………………………… 357
3. 尾约术 …………………………………………… 358
4. 安岛直圆的研究 ………………………………… 358
5. 不可思议的循环小数 …………………………… 359
第 3 节　素因数分解……………………………………… 360
1. 1 的行列 ………………………………………… 360
2. 10^n+1 的素因数分解 ………………………… 362
第 4 节　悖论……………………………………………… 365
第 5 节　9 的游戏 ……………………………………… 371
第 6 节　4 的游戏 ……………………………………… 375
第 7 节　数字游戏的奥林匹克…………………………… 380
第 8 节　小町算…………………………………………… 385
1. 小町算 …………………………………………… 385
2. 各种小町算 ……………………………………… 387
第 9 节　数之美…………………………………………… 392
本书的利用及其希望……………………………………… 407
1. 数学游戏在日本国外 …………………………… 407
2. 教学中的利用 …………………………………… 408
3. 本书的完成 ……………………………………… 409
素数表……………………………………………… 414
数学游戏文献……………………………………… 418
素因数分解表 1—100 000 ………………………… 430
索引………………………………………………… 465

第1章 物语I

第1节 继 子 立

1."继子立"的含义

"继子立"是和算书《尘劫记》中的著名问题，但在《尘劫记》以前300多年前，在吉田兼好(1282—1350)的《徒然草》第137段"花盛开，月亮普照大地"条中已经出现了该问题.

国语学者解释了"继子立"的含义，在《徒然草诸抄大全》中写道：

"● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○
二 一 三 五 二 二 四 一 一 三 一 二 二 一

如此排列黑白棋子，每数到第10个棋子时把它去掉.(如图1) [1]

从有鳞形[①](△)记号的棋子开始向左一一数，将第10个棋子去掉，若如此反复进行，则最后除有圆形(○)记号的白色棋子以外，其他白色棋子全部被去掉.若此时改变数棋子的方向，从右侧的有圆形记号的棋子开始向右数，则黑色棋子全部被去掉，只有圆形记号的白色棋子剩下."

由此读者大概了解了"继子立"的含义，下面再介绍《尘劫记》的原文.《尘劫记》初版(宽永4年，1627年)中没有"继子立"游戏，

---

① 鳞形：即三角形.



图 1 《寿山案》中的"继子立"图.

但在 5 卷本和宽永 8 年(1631 年)的版本中就有了. 游戏如下:

"有三十个孩子, 其中 15 人是由前妻所生, 15 人是继子. 将这些孩子如图 2 排列, 从某一孩子开始数, 每次数到第十人时将他去掉, 反复地数, 最后去掉二十九人只剩下一人, 让此人继承遗产."



图 2 《尘劫记》中"继子立"图.

《尘劫记》中有绘图，给前妻所生的孩子穿黑色衣服，给继子 [2]
们穿白色衣服，排成圆形①. 把它简化为如图 3：

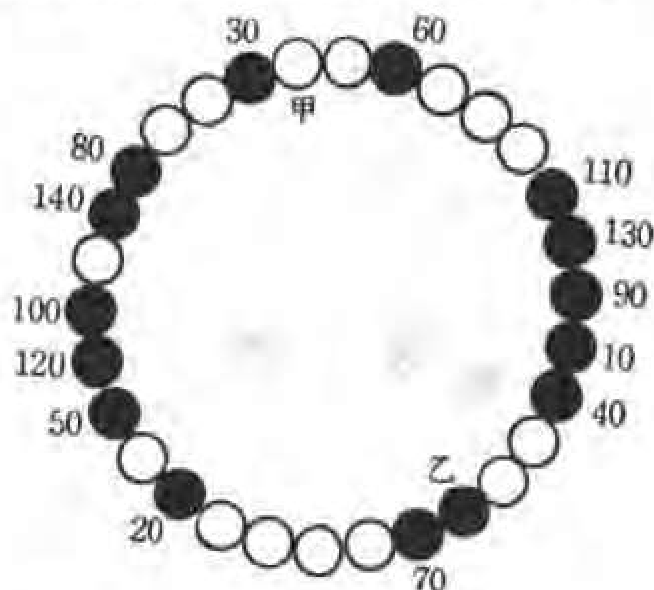


图 3

从甲开始数，前妻所生孩子 14 人被去掉，第 15 次乙遭到被去掉的命运. 于是提出建议说，由于只有一方被去掉，所以下回从乙开始数一下，认为这样比较公正，于是从乙开始数了以后，最后继子（白色）全部被去掉，只剩下乙.

白色有 15，黑色只有 1 的情形下，如果从黑色开始数，那么
白色全部被去掉，黑色剩下. 这就是"继子立"的要点. [3]

2. "继子立"的历史

村井中渐（1708—1797）的著作《脱子术》（明和 5 年，1768 年）中说，在平治之乱（1159 年）中被杀害的藤原通宪创造了"继子立"，但现在还不清楚这个说法的出处.

《徒然草》以外，被认为镰仓②末期的《二中历》卷 13 中，有

① 此说法与图 2《尘劫记》排列方法相反. 在这个意义上说，只有图不同，将黑白颠倒后，与图 2 相一致了.（大矢真一）

② 镰苍：日本的一个地名. "镰苍末期"是日本历史上的一个时代（1192—1333）的末期.

下面的数字：

后子立　二 一 三 五 二 二 四 一 一 三 一 二 二 一

一说云　一 一 三 二 一 三 二 二 三 二

所谓"后子立"，有确立后妻之子的意思."后子立"与前面介绍的 30 人的"继子立"问题相同，而"一说云"是 20 人的"继子立"问题，有如图 4 的形式.从甲开始数，每数到第 10 个就将它去掉.

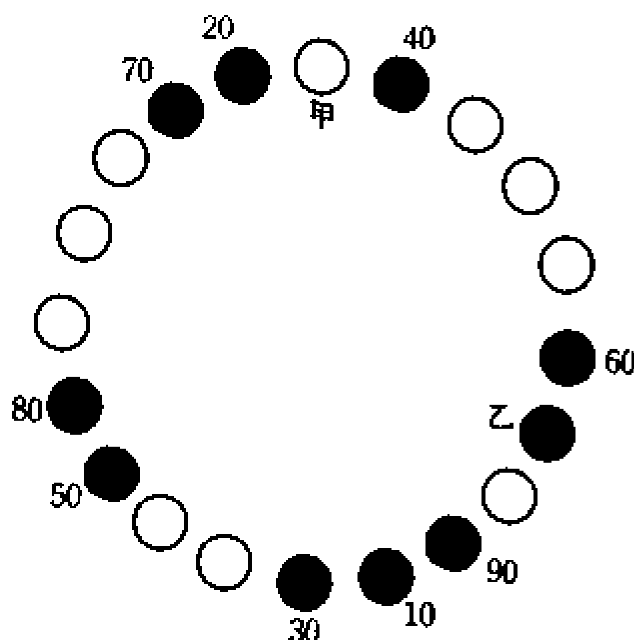


图 4

在《簾中抄》、《异制庭训往来》、《游学往来》等书中也有类似的记载，但这些都是从《二中历》中来的，所以我们现在还不清楚"继子立"的作者和被创作的具体年代.

而在《倭训栞》中说：

"继子，《徒然草》中的'继子立'是排列双陆棋子的一种游戏.《梵书》中叫做'萨子'."

据这个说法，"继子立"似乎与佛教有关，但至今还没有发现确凿证据.

3. 西方"继子立"

[4] 在西方也从很早以前就流传着与"继子立"类似的问题，美

国数学史家 D・E・史密斯的研究表明，最早的问题可以追溯到 4 世纪初. 12 世纪初的犹太学者 Rabbi ben Ezra 的著作《Tabbula》中也有这种游戏. 但是，现在还没有找到"继子立"从西方传入日本的证据.

西方人把这个游戏叫做约瑟夫斯问题①或者叫做土耳其和基督教徒问题.

15 个基督教徒和 15 个土耳其人同船渡海时，船出了故障. 船长作出决定宣布必须牺牲 15 人才行. 于是把基督教徒和土耳其人按如下形式排列：

4	5	2	1	3	1	1	2	2	3	1	2	2	1
基	土	基	土	基	土	基	土	基	土	基	土	基	土

于是开始 9 个人 9 个人地数，将被数到的第 9 人扔到大海里. 如图 5 所示，白色为基督教徒，黑色为土耳其人，从甲开始数，数到第 9 人将他扔到大海里，最后黑色的 15 人全被扔到大海了.

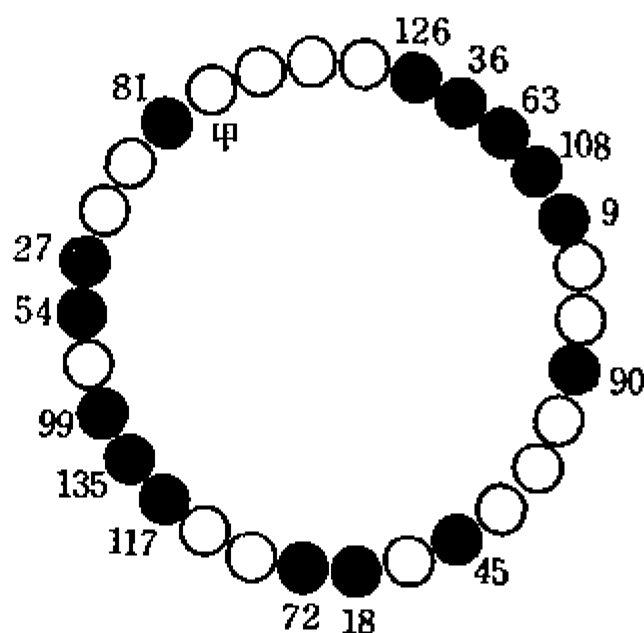


图 5

① 西方叫做 Josephus' problem，译作"约瑟夫斯问题".

这个游戏和日本“继子立”有所不同.在日本“继子立”中,没有其他排列方法,但在约瑟夫斯问题中还有记忆方法.从暗语“From numbers aid and art, never will fame depart.”(借助数和技术就不会失去名誉.)中抽取母音后,选择符合下面对应关系的数字就可以了:

a e i o u

1 2 3 4 5

o u e a i a a e e i a c e a

[5] 4 5 2 1 3 1 1 2 2 3 1 2 2 1

有各式各样的这种暗语:

Non dum pena minas a te declina degeas.

(被追到家门口.)

Mort, tu ne falliras pas, en me livrant le trepas.

(死神啊,你一定要让我坚持到最后时刻.)

Gott schlug den Mann in Amalek, den Israel bezwang.

(神在阿玛列库打败了以色列人.)

如果记住这些暗语后,无论什么时候也都会排列.

在该问题中,排列 30 人去掉第 9 个人.在西方也有和日本同样的去掉第 10 个人的游戏方法.这是一个应该注意的问题.

首先,介绍一下暗语:

Rex paphi cum gente bone dat signa serena.

(支配者给予了好的暗示.)

抽出母音来观察一下:

e a i u e e o a a i a c e a

2 1 3 5 2 2 4 1 1 3 1 2 2 1

这与日本“继子立”的排列方法完全相同.

德国人阿廉斯的著作中详细介绍了约瑟夫斯问题的历史,下面作一些简单的调查.

著作的作者不详,这大概是阿穆波罗思(Ambrose of Mi-

lan,370 年左右)以黑格西帕斯(Hegesippus)的匿名发表的书中有这个问题. 据传说,Vespasia 人掠夺 Jotapata 的时候,约瑟夫斯和其他犹太人一起隐藏在洞穴里,但由于其中的部分人必须做出牺牲,所以这个方法挽救了他.

约瑟夫斯是公元 1 世纪的犹太历史学家. 这里所说的"这个方法",并没有明确说明去掉"第 9 个"或"第 10 个"的方法,这可能是因为古代曾经有过若干种游戏方法. [6]

除去掉"第 10 个"的方法以外,还有引人注意的其他方法. 在古罗马军队中,出某一事件的时候,施行从 10 人中选 1 人的方法. 把这个方法叫做 Decimatio 方法,这也许与约瑟夫斯问题有某种关系.

D. E. 史密斯的研究表明,这个问题的最早记录在 10 世纪初的 Codex Einsidelensis 的第 326 条中,后来在慕尼黑图书馆的 11 世纪的手抄本,以及 12 世纪的 Codex Bernensis 的第 704 条中都有这个问题. 另外,12 世纪犹太学者 Rabbi ben Ezra (1167 年卒)的《Tahbula》中也有这个问题,但最早在 1518 年 Elias Levita 正式出版了该问题.

在西方的 10 世纪到 16 世纪出现了该问题的很多记载. 在日本,室町时代①出现了"继子立"的记载. 然而,令人费解的是,在至今的研究中还没有发现中国的有关记载. ②

4. 问题的本质

在西方的约瑟夫斯问题中是去掉第 9 人、第 10 人,正如后面将要介绍的那样,重新确定要去掉的那个位置的人之后,相反

---

① "室町时代"是日本历史上足利幕府统治时代(1338—1573). 室町是地名.

② 中国在方中通《数度衍》中有记载,见郭世荣"方中通《数度衍》所见的约瑟夫斯问题",《自然科学史研究》22(1),2002,29 -35.

地，也可以再指派一人，所以，能够做这种排列方法.

但是，详读日本的《徒然草》和《尘劫记》之后，能够体会到“继子立”与约瑟哈斯问题之间的微小差别. 约瑟夫斯问题是以确定位置为主，而“继子立”以有关人数为主，即“第 10 人和第 15 人”是问题的关键. 从这个意义上看，“继子立”比约瑟夫斯问题要深刻.

在图 3 中，当黑色(乙)只有 1 人，其他都是白色时，按照继子
[7] 的要求，从乙开始以 10 个人为一循环数并去掉第 10 个人，那么
最后只有作起点的乙剩下来(如图 6). 好好动动脑筋后，会更好地理解吉田兼好法师的“人世无常”中的物语的意义. 从这个意义上说，《二中历》中的“继子立”和西方约瑟夫斯问题的意义有所不同.

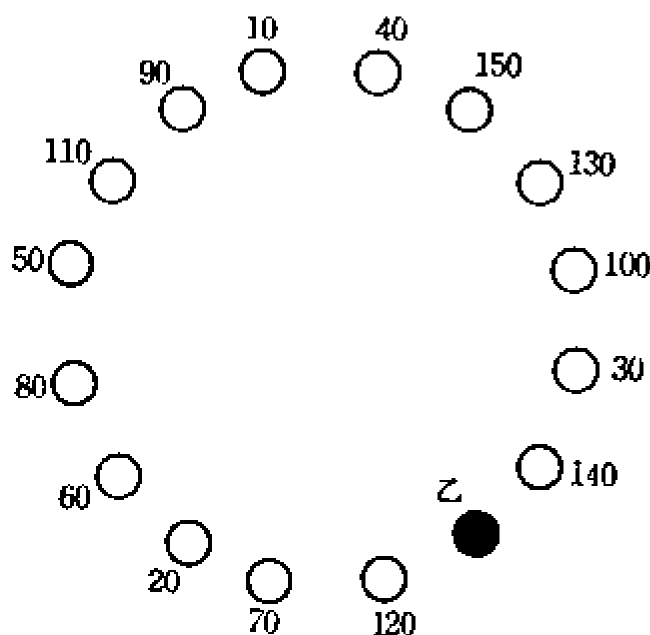


图 6

正因为如此，如果有 16 人的时候去掉第 10 个人，那么开始数的那个人被留下，但在 20 人的情况下不成立.

因此，为使该问题成立必须要确定排列的人数(叫做总数)和要去掉第几个人(叫做脱数). 然而在这个问题中先确定总数，再确定脱数是不可能的，而应该先确定脱数，再确定总数.

关孝和完全解决了该问题，他在《算脱之法》中介绍了该问题的计算方法. 该计算方法非常繁琐，所以关孝和只计算到脱数

为 9、总数为 5 的情形. 下面我们介绍一下关孝和的弟子建部贤弘计算出来的表格. 建部计算到脱数为 30、得出的总数为 7 个.

下表("关—建部表")中,总数=正限数+1. 实际上没有这个必要,但为了慎重起见,连繁琐的计算都列举出来了.

脱数	正限数					
2	1	3	7	15	31	63	127
3	3	5	8	30	69	104	354
4	1	4	8	11	15	217	516
5	2	5	11	14	36	57	141
6	1	2	7	13	73	127	318
7	22	49	92	234	319	1 376	4 403
8	1	4	9	19	29	44	76
9	90	145	207	233	474	1 083	1 371
10	1	15	21	70	226	327	1 226
11	2	6	13	16	24	105	170
12	1	2	3	6	15	171	1 168
13	23	25	35	38	894	1 137	5 208
14	1	3	5	6	145	227	1 688
15	3	4	8	11	16	20	78
16	1	5	8	10	19	25	35
17	2	55	75	102	326	1 319	3 483
18	1	2	4	5	10	27	41
19	4	89	94	117	704	923	1 586
20	1	8	9	17	20	80	515
21	5	6	12	26	44	108	205
22	1	4	17	24	575	4 462	15 672
23	2	5	15	28	37	51	181
24	1	2	3	6	7	9	12
25	8	14	16	32	371	913	2 752
26	1	3	37	114	139	373	511
27	3	11	13	16	49	55	98
28	1	10	15	19	24	29	64
29	2	4	10	16	47	65	75
30	1	2	13	14	21	26	40

[8]

例如，假设去掉第 5 个人时，脱数 5 的正限数 2，5，11，14，…上加 1，将 3，6，12，15，…人排成圆形，以 5 个人为循环数到第 5 人把他去掉，那么开始数的那个人被留下.

我们稍微变更关孝和的方法来说明这个问题的解决方法. 这是为了给后面将要介绍的"继子立"变形作准备.

现在，设总数（上表中，正限数＋1）n、脱数 m. 首先，解"已知 n,m 时，最后所剩下的棋子（在这里的说明中认为排列棋子）在
[9] 从开始数的棋子第几个位置上"的问题.

设最后剩下的棋子为从开始数的棋子到第 N_n 个棋子，那么第 1 回结束时，第 m 个棋子被去掉，$n-1$ 棋子被去掉. 因此，第 $m+1$ 个棋子就是下一回开始数的那个棋子.

最后剩下的棋子就是从重新开始数的第一个棋子到第 N_{n-1} 个棋子，所以从最初数的第一个棋子开始数到第 $N_{n-1}+m$ 个棋子.

其中，当 $N_{n-1}+m$ 大于 n 时，从 n 减去前者. 当小于 n 时，不用加减了. 如果用同余式来表示该过程就是：

$$N_n \equiv N_{n-1}+m \pmod{n}.$$

这里，如果 $n=1$，无论 m 取何值，都有 $N_1 \equiv 1$. 故以下恒等式成立：

$$\begin{aligned}
&N_1 \equiv 1 \\
&N_2 \equiv N_1+m \pmod{2} \\
&N_3 \equiv N_2+m \pmod{3} \\
&\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\
&N_n \equiv N_{n-1}+m \pmod{n}
\end{aligned}$$

例如，当脱数 $m=10$ 时，有

$$\begin{aligned}
&N_2 \equiv 1+10 && \pmod{2} && N_2=1 \\
&N_3 \equiv N_2+10 && \pmod{3} && N_3=2 \\
&N_4 \equiv N_3+10 && \pmod{4} && N_4=4（不能\ N_4=0） \\
&N_5 \equiv N_4+10 && \pmod{5} && N_5=4
\end{aligned}$$

$$N_6 \equiv N_5 + 10 \pmod{6} \qquad N_6 = 2$$
$$N_7 \equiv N_6 + 10 \pmod{7} \qquad N_7 = 5$$
$$N_8 \equiv N_7 + 10 \pmod{8} \qquad N_8 = 7$$
$$N_9 \equiv N_8 + 10 \pmod{9} \qquad N_9 = 8$$
$$N_{10} \equiv N_9 + 10 \pmod{10} \qquad N_{10} = 8$$
$$N_{11} \equiv N_{10} + 10 \pmod{11} \qquad N_{11} = 7$$
$$N_{12} \equiv N_{11} + 10 \pmod{12} \qquad N_{12} = 5$$ [10]
$$N_{13} \equiv N_{12} + 10 \pmod{13} \qquad N_{13} = 2$$
$$N_{14} \equiv N_{13} + 10 \pmod{14} \qquad N_{14} = 12$$
$$N_{15} \equiv N_{14} + 10 \pmod{15} \qquad N_{15} = 7$$
$$N_{16} \equiv N_{15} + 10 \pmod{16} \qquad N_{16} = 1$$

为了使最后所剩下的棋子为开始数的第一个棋子，必须有 $N_n = 1$. 如果取脱数 $m = 10$，如上面计算，对应 $N_2 = 1$ 和 $N_{16} = 1$ 的总数为 2 和 16 时，开始数的第一个棋子就是最后所剩下的那个棋子.

在第 9 页"关一建部表"中的正限数为 $n-1$. 现在已经解决了问题，下面再看实例. 例如，要想去掉第 3 个人的时候，从表中可以看到，将(3+1)人、(5+1)人、(8+1)人、(30+1)人、……排成圆形，被数到第 3 个的人被去掉，这样最初数的那个人剩下，如图 7.

以上计算中以 n 作"法"，以 N 作"实"，进行如下排列：

法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
实	1	1	2	4	4	2	5	7	8	8	7	5	2	12	7	1

该表格表明，在给出"法"(总数)的情况下，从甲开始数把所有被数到第 10 个的人去掉，最后剩下的人应该是从甲数第几个人(实).

下面再显示一下($n=10$，$m=10$，实$=8$)，($n=11$，$m=10$，实$=7$)，($n=12$，$m=10$，实$=5$)的情形.

从甲开始数，乙是所剩下的棋子.(如图 8)

[11]

图 7

图 8

5. 捉迷藏游戏

前面介绍了村井中渐于天明 4 年(1784 年)出版的数学通俗书《算法童子问》,其中在介绍了 30 个人的“继子立”问题之后,接着讲述了“捉迷藏”游戏.

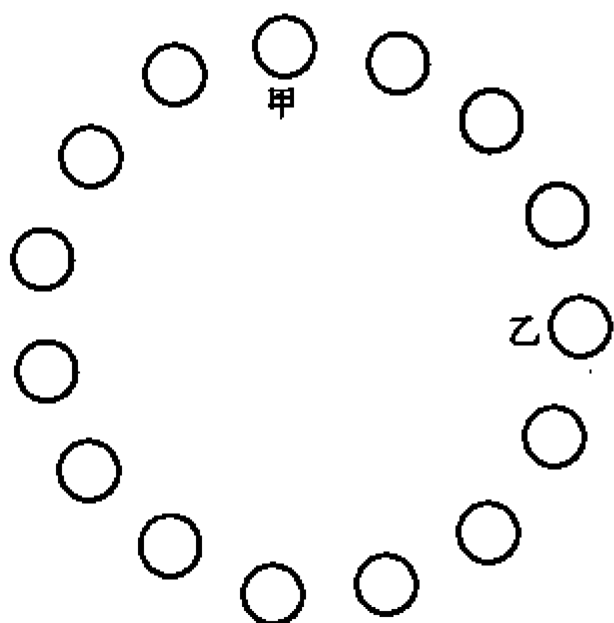


图 9

“有叫做捉迷藏的游戏. 15 个儿童集中在一起如图 9 排列,从甲开始顺时针方向数,

一　二　三　四　五　六　七

每次数都要去掉第七个人,被去掉的人各自隐藏到某处,然后从被去掉的下一个人再开始数,给最后剩下的小法师一人起 [12]
名为鬼(乙),然后寻找隐藏起来的 14 个小孩. 问从甲开始数鬼(乙)是第几个人?

答:从开始数的那个人向右开始数是第五个人.”

没有必要再解释这个问题的意思了. 它相当于前面理论中的($n=15, m=7$,实$=5$)的情形. 下面计算 $m=7$ 的情形.

$$N_2 \equiv 1+7 \pmod 2 \qquad N_2=2$$
$$N_3 \equiv N_2+7 \pmod 3 \qquad N_3=3$$
$$N_4 \equiv N_3+7 \pmod 4 \qquad N_4=2$$

$$N_5 \equiv N_4 + 7 \pmod 5 \qquad N_5 = 4$$
$$N_6 \equiv N_5 + 7 \pmod 6 \qquad N_6 = 5$$
$$N_7 \equiv N_6 + 7 \pmod 7 \qquad N_7 = 5$$
$$N_8 \equiv N_7 + 7 \pmod 8 \qquad N_8 = 4$$
$$N_9 \equiv N_8 + 7 \pmod 9 \qquad N_9 = 2$$
$$N_{10} \equiv N_9 + 7 \pmod{10} \qquad N_{10} = 9$$
$$N_{11} \equiv N_{10} + 7 \pmod{11} \qquad N_{11} = 5$$
$$N_{12} \equiv N_{11} + 7 \pmod{12} \qquad N_{12} = 12$$
$$N_{13} \equiv N_{12} + 7 \pmod{13} \qquad N_{13} = 6$$
$$N_{14} \equiv N_{13} + 7 \pmod{14} \qquad N_{14} = 13$$
$$N_{15} \equiv N_{14} + 7 \pmod{15} \qquad N_{15} = 5$$
$$N_{16} \equiv N_{15} + 7 \pmod{16} \qquad N_{16} = 12$$
$$N_{17} \equiv N_{16} + 7 \pmod{17} \qquad N_{17} = 2$$
$$N_{18} \equiv N_{17} + 7 \pmod{18} \qquad N_{18} = 9$$
$$N_{19} \equiv N_{18} + 7 \pmod{19} \qquad N_{19} = 16$$
$$N_{20} \equiv N_{19} + 7 \pmod{20} \qquad N_{20} = 3$$
$$N_{21} \equiv N_{20} + 7 \pmod{21} \qquad N_{21} = 10$$
[13] $$N_{22} \equiv N_{21} + 7 \pmod{22} \qquad N_{22} = 17$$
$$N_{23} \equiv N_{22} + 7 \pmod{23} \qquad N_{23} = 1$$

"捉迷藏"是日本很早以前就流行的游戏. 如确定鬼的方法，即使是在现在的日本东北的偏僻地区仍然存在. 这个方法也许在《徒然草》中早就有过，但是最早的文献记载是在天明 4 年出版的《算法童子问》.

6. "继子立"的变形

(i) "新风流继子立"

日本奇术之鼻祖环中仙在享保 12 年(1727 年)著了《和国智慧较》，发表了"新风流继子立"(原文如图)，指出了"继子立"的有趣的性质.

图 10

(1) 首先，将 16 个白色棋子排成圆形，如图 11(1).

(2) 确定甲之后向右方向数，每数到第 8 个后，将白色棋子换成黑色棋子. 第二次数的时候跳过上次已经调换的黑色棋子. 调换 8 个棋子后的形式为如图 11(2).

(3) 该图中(图 11(3))，从甲开始数，每数到第 8 个棋子后

(1) (2) (3)

图 11

[14] 将它去掉，这样，白色棋子都被去掉.

(ii) 落书

“继子立”最有趣的方面就在于开始数的棋子最后被留下.

[15] 从这个意义上说，把西方的约瑟夫斯问题可以看作“继子立”的一种变形. 在日本，宽永 3 年(1663 年)村松茂清著了《算组》，其中以“落书”为题名，介绍了具有新趣味的四个问题.

第一，将黑白各 15 个棋子和 2 个双六如图 12 排列. 从记号→开始数，每数到第 10 个棋子将它去掉，结果黑色棋子全被去掉，然后，白色棋子也全被去掉，最后，2 个双六也被去掉.

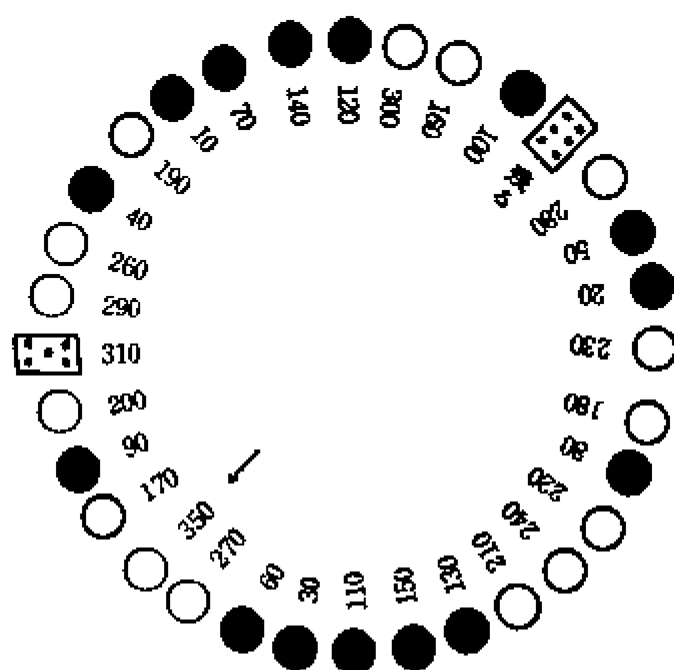


图 12①

如前面在“新风流继子立”中所显示的那样，开始排列 32 个白色棋子，每数到第 10 个棋子(白色)后将它调换为黑色棋子，这样能够作出上面的图 12.

其第二、第三是把日本象棋的棋子(合计 40 个)如图排列.

步	香	桂	银	金	角	飞	玉	王
18	4	4	4	4	2	2	1	1

① 残：即留下来的意思。

每数到第 10 个棋子将它去掉后，其被去掉的情形发生变化.

其一，步 9，香、桂、银、金各 2，角、飞、玉各 1 被去掉，其二，步 9，香、桂、银、金各 2，角、飞都被去掉，最后王剩下.

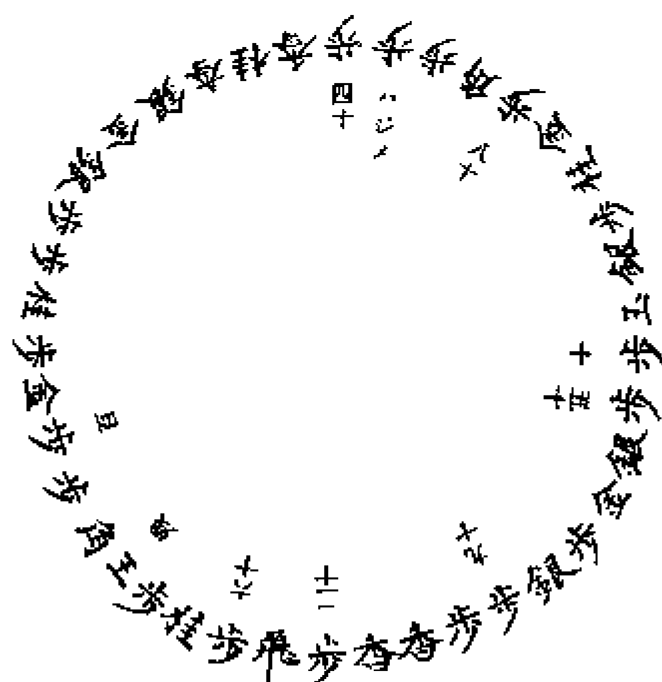


图 13 [16]

第四，步 18，香、桂、银、金各 4，角、飞各 2，玉 1 被去掉，最后王被留下.



图 14

下面再看“加留田十落”游戏.从右上角的马开始连续地数，数到第 10 个后将它去掉.因此，把这个游戏叫做“十落”.实际上这里把圆形排列改变为长方形排列了.

最初，4 只虫被去掉，然后，二、三、四、五、六、七、八、九各 4 个被去掉，最后，马和腰各 4 个被去掉.

“加留田”是日本纸牌.有虫、腰、马等名称的纸牌是当时流行的南蛮纸牌，这是日本国采取封闭政策时流行的纸牌.

这 4 种变形的“继子立”问题预先确定要去掉的棋子的位置，所以作为“继子立”的价值不高.

六	六	二	馬
馬	四	八	二
四	十	七	五
虫	十	腰	九
馬	十	馬	五
九	虫	六	六
七	八	五	八
九	八	虫	七
腰	七	十	三
三	三	三	虫
四	二	九	腰
腰	五	二	四

图 15

7. 计子算

[17] 关孝和开辟了和算道路以后的大约 100 年间，日本数学得到了长足的发展.

关孝和 { 荒木村英 —松永良弼— 山路主住—有马赖僮
　　　　建部贤弘—中根元圭—中根彦循

关孝和的第四代弟子有马赖僮既是久留藩的殿样（官僚），又是著名的数学家，他在明和 6 年（1769 年）出版了《拾玑算法》五卷.该书把“继子立”叫做“计子算”，但已经变成非常难的数学问题，一直到现在几乎没有人解决这些问题.

(i) 将 25 个棋子排成圆形，确定“原”，从该棋子开始按照圭垛积的顺序去掉第 1、第 3、第 6、第 10、……，去掉第 9 个圭垛积(45)棋子后，再沿着相反方向，按照三角垛积的顺序去掉第 1、第 4、第 10、第 20、……，问被去掉的第 7 个三角垛积的第 84 个棋子为从“原”第几个棋子？

答：从“原”第 11 个棋子.

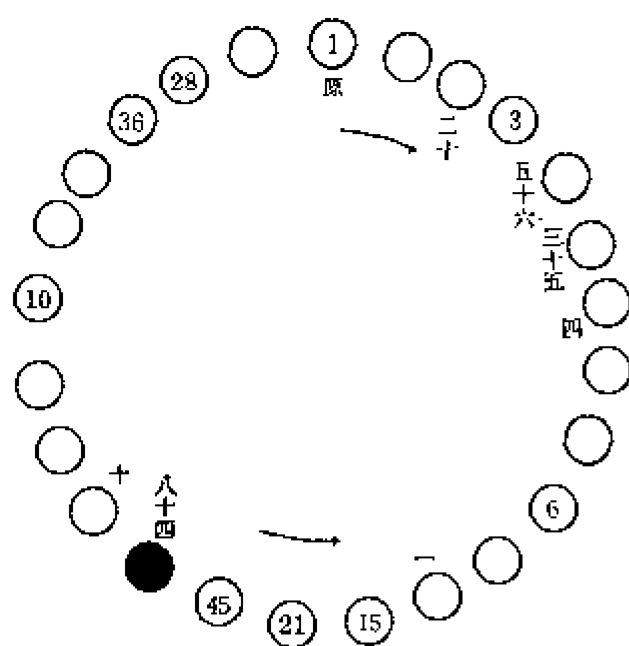


图 16

所谓圭垛积是(如下表),把自然数的前面的数全部相加后的数,即巴斯加三角形数.三角垛积是用圭垛积制作的数.

自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
圭垛积	1	3	6	10	15	21	28	36	45
三角垛积	1	4	10	20	35	56	84		

(ii) 将 20 个棋子按圆形排列,确定"原",从它开始数,去掉第奇数次的棋子,如第 3、第 5 个棋子.当第 9 个棋子被去掉时, [18]

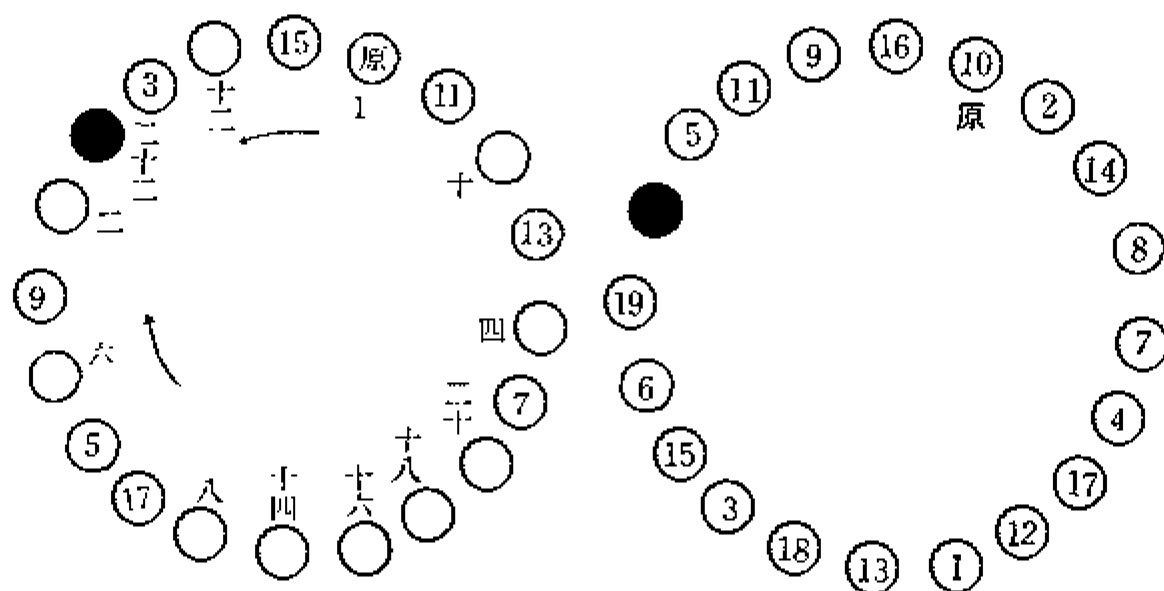


图 17

再从该棋子开始沿着相反方向数，并去掉第偶数次的棋子，如第2个、第4个、第6个棋子. 到第11个偶数(22)后，被去掉的棋子从“原”第几个棋子?

答:从“原”第5个棋子.

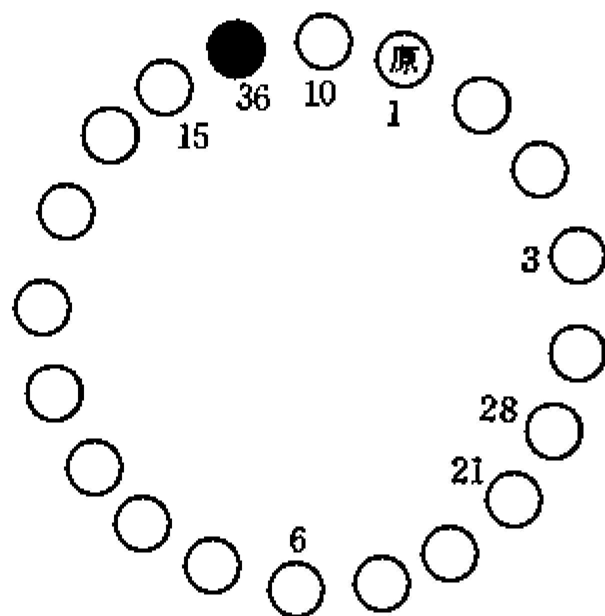
(iii) 将20个棋子按圆形排列(如下表)，确定“原”，按照第9个棋子和第13个棋子反复地去掉，那么最后剩下的棋子从“原”第几个棋子?

答:第16个棋子.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
9	13	9	13	9	13	9	13	9	13	9	13	9	13	9	13	9	13	9	13

(iv) 将20个棋子按圆形排列，确定“原”，按照圭垛积去掉，如第1,3,6,10,15,21,28,…. 去掉从“原”第19个棋子属于第几个圭垛积?

答:第8个圭垛积.



[19] 图 18

没有给出上面4个问题的实际解答过程，在《拾玑算法》中给出了计算公式，由于过于复杂，这里就省略了.

《拾玑算法》中的问题，可能是从《阐微算法》(宽延 3 年，1750 年，武田济美著)转变而来的，但这本书中还没有简单的一般性解法.

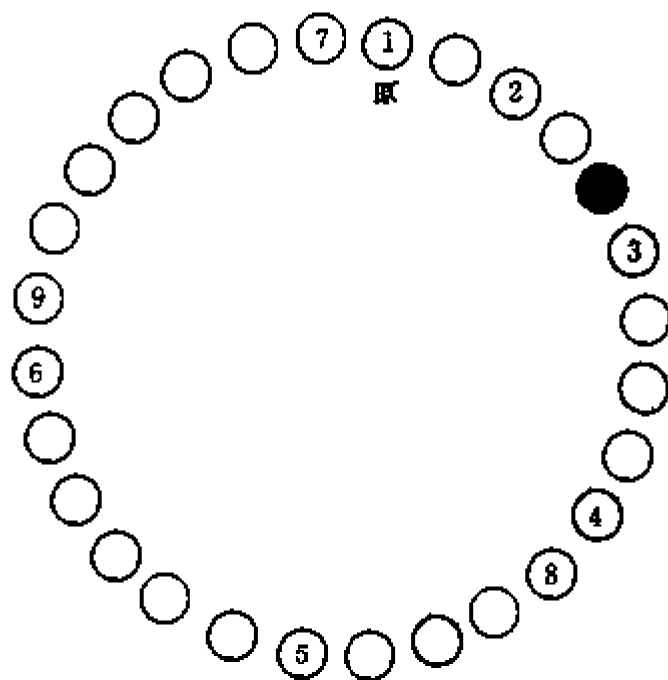


图 19

将 28 个棋子按环状排列，确定“原”，从“原”第 5 个棋子为黑色. 去掉开始的第 1 个棋子(即去掉“原”)，接着去掉第 2 个，第 3 个，第 4 个棋子……，被去掉的黑色棋子为第几个？

答：第 19 个. [20]

第2节 药 师 算

药师算首次出现是在日本宽永 8 年(1631 年)再版的吉田光由的数学著作《尘劫记》中. 后来在宽永 11 年(1634 年)、宽永 18 年(1641 年)出版的《尘劫记》中也被提出，但在其他书中很少见到. 在宽永 8 年(1631 年)的书中没有“药师算”之名称. 类似于“药师算”的数学游戏在中国和西方的文献中都没有.

1. 药师算[①]的原形

在宽永8年(1631年)的《尘劫记》中药师算的答案存在着不完备的地方，因此在这里要举出在宽保3年(1743年)中根彦循《勘者御伽双纸》的全文. 所谓勘者，是关于算账的人一种数学游戏.

“药师算之事. 列若干个棋子作一正方形. 如图20. 若当拆三边后(棋子)沿着其余一边进行排列时，余数有三，则总数为二十四.

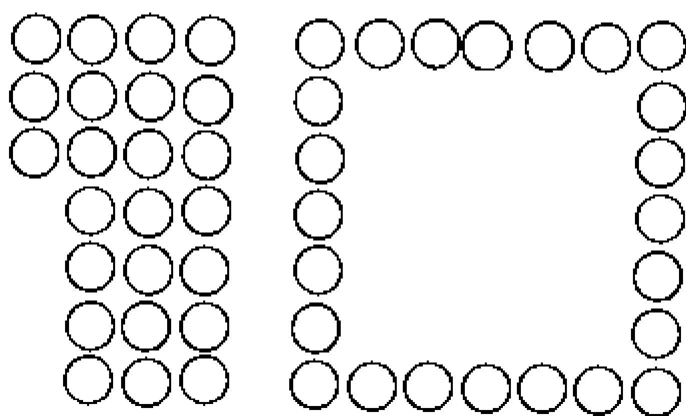


图 20

法曰：四倍余数则得一十二，再加定法十二得二十四. 若无余数，则必得十二或四.《尘劫记》之得数一百二十四是误也. 又，余数为二，则必得八.”

如图20，用棋子作正方形，然后保留其一边，拆其余三边，并沿着所保留的一边列棋子时不足四列，且必有一列不足4. 如果设定不足4之列的棋子数为 r 个，则

一列的棋子数 $= r+4$

棋子的总数 $= 4(r+4-1) = 4r+12$.

在原文中，12为定数，故称为“定法”.

当 $r=0$ 时，为12.《尘劫记》中误认为这个结果是120.

这里的定数12，与药师如来有密切关系. 如来立了12个大

① 药师：指佛教中的药师如来.

誓头救了众生之病苦，委派12个神守护一日12时(古时候把一日分成12时). 此12就是"药师算"这个名称的来源. 在有的《尘劫记》中有记载.



图 21 《环中仙》中的"和国智慧较". [23]

2. 变形的药师算

在《勘者御伽双纸》中也论述了正三角形和正五边形的情形.

"列同三角(正三角形). 如此，把若干棋子，以等数为边作三角，并拆其中两边(之棋子)，如图 22，沿其余一边排列时，余出五个棋子. 因此(原正三角形棋子)总数为二十一.

法曰：三倍余数五得十五. 再加定法六得总数二十一. 又，当无余数时，必为六. 《智慧较》中所说六十为误. 又，当余数为一时必为三."

下面看排列正三角形的情形. 拆两边排列成一列时，最后一

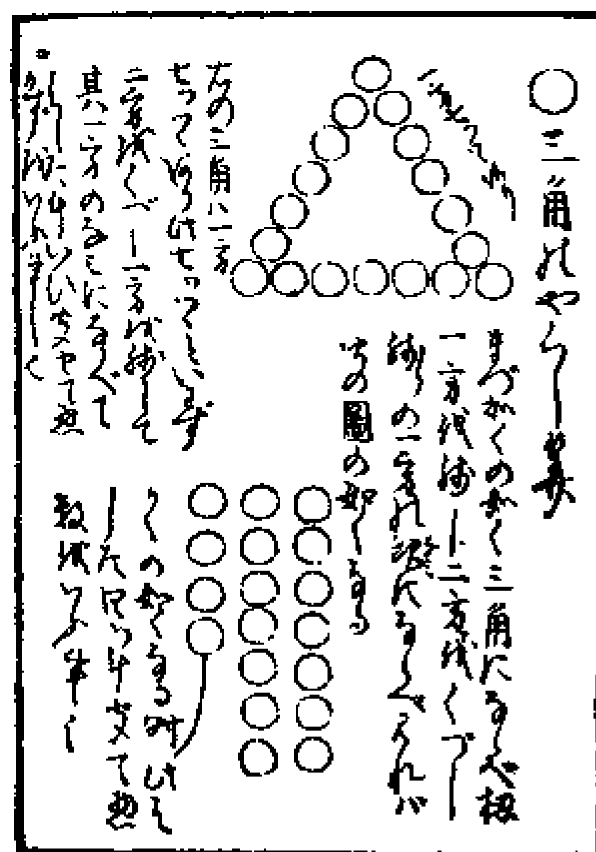


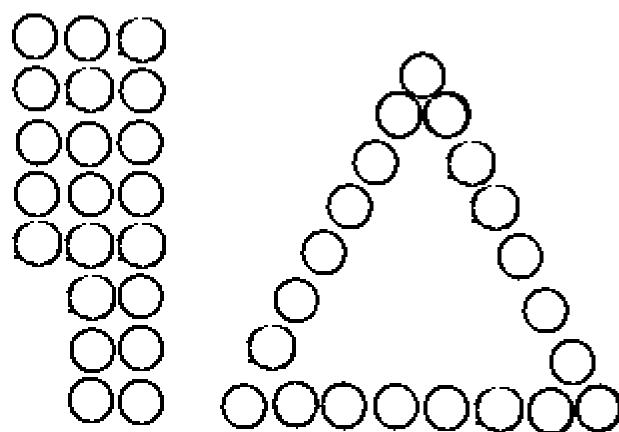
图 22 《环中仙》的"智慧较"答案.

列必定不足 3. 设不足 3 的棋子数为 r,则

$$一列的棋子数 = r+3,$$

$$棋子总数 = 3(r+3-1) = 3r+6,$$

这种情形下的定数为 6.



[24]

图 23

《智慧较》是指环中仙的《和国智慧较》(享保 12 年,1727

年).“环中仙”的真名为“不破仙九郎”.在歧阜县①的水灾多的地方,建圆形堤坝,防止了每年的水灾.把它称为“轮中”,由于不破仙九郎也是本地人的缘故,就给他起了“环中仙”的名字.环中仙是日本国魔术的祖师.他有魔术方面的著作,图22是环中仙著作中的照片.

“列同五角.如同前.列后余数为一时,得数必为二十五.

法曰:五倍余数后加定数二十得二十五.又,无余数时必得二十.又,余数为一时,曰五或十.余数为三时,曰十五.”

关于这一点,没有说明的必要.对一般情形有如下说明:

“此外,无论列为何种角形,求加定法数的术为,角数减一,余数乘角数,该数作为加数.又,列少于此数的数,当论及余数时,答数有各种,无法确定.故将加数限制在最小数为佳.如,四角时,四减一,再乘四,得十二.十二即为加数.”

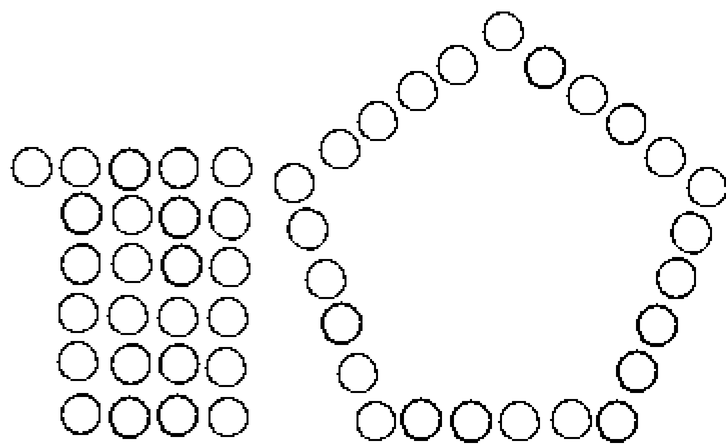


图 24

一般地,列正 n 边形时,最后一列不足 n 个.设该列棋子个数为 r,则

$$一列棋子数=r+n,$$

$$棋子总数=n(r+n-1)=nr+n(n-1),$$

因此,要加的定法数为 $n(n-1)$,但是开始排列棋子个数少于 [25]

① 歧阜县是日本的一个县,在名古屋西北.

$n(n-1)$时，得不出一般规则.

第3节 左 左 立[①]

该问题收录于《勘者御伽双纸》. “左左立”有“同，分配一与三”和“分配二与三”的三道例题.

“左左立.

如，今有钱三十文，按一文和二文（比例）分配时，对方每次都发‘洒洒’之声，注意数发声次数，共发声十八次. 答曰：一文者得钱六文. 如图 25 所示

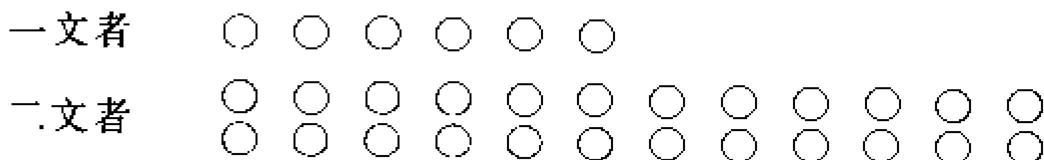


图 25

法曰：倍发声数，得三十六，减原钱数三十，则余数为六，即为一文者的声数. 不管付钱数几何道理皆同. 又三十文之数减发声数十八，倍余数十二，得廿四，此数为二文者所得钱数.”

日本语中的“左”的发音与汉语的“洒”声相近，因此，产生了“左左立”的名称. 设一文者的发声数为 x，二文者的发声数为 y，那么如图 25 所示：

$$x+2y=30,$$
$$x+y=18.$$

把第二式加倍后由第一式减去得

$$\begin{array}{r} 2x+2y=36 \\ x+2y=30 \\ \hline x=6 \end{array}$$

① “左左立”中的“左左”为日本语中拟声词“洒洒”.

这就是一文者的发声数.“法曰”前半部说的就是这一点.由此可见分配给一文者的钱数. ［26］

由前式减后式得 $y=12$,加倍发声次数后就得交付给二文者的钱数 24 文.“法曰”后半部说明的就是这一点.

“同,分一和三之事.

如,若递给石三十块时发出十六声,则一者得九.如图 26 所示:

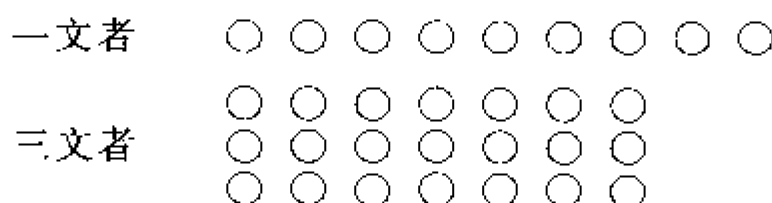


图 26

法曰:三乘发声数(十六)得四十八.减原石数三十,将余数十八平分,即一者为九.又由原棋子数减发声数十六,余数十四乘以三得四十二,再平分得二十一,即为三者之数.”

设一者的发声数为 x,三者的出声数为 y,那么有

$$x+3y=30,$$

$$x+y=16.$$

用 3 乘后式两边,再减前式

$$\begin{array}{r} 3x+3y=48 \\ -\ \ x+3y=30 \\ \hline 2x=18 \end{array}$$

故

$$x=9.$$

“法曰”中已经论述这一方法.

“同,分二和三之事.

如,递给三十块石发出十一声,那么二者为六.如图 27 所示

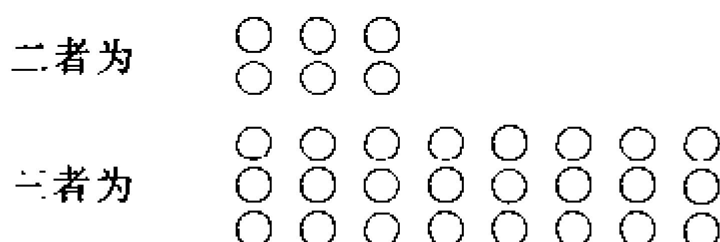


图 27

法曰：发声数（十一）乘以三得三十三，再减原来石数三
[27] 十，乘倍余数三，则二者得六. 又求发声数的倍数得廿二，由
原石数三十减之得八，又乘以三得廿四，此数为三者所得石
数."

这里再没有必要说明"左左立"了. 在《异制庭训往来》中的"左左立",可能指的是第一道题中的按一比二的比例分配的问题吧. 左左立问题引起人们注意的是它不仅是单纯的游戏问题，而且可能是由于具有数学思考方法色彩的缘故吧.

早在奈良朝代，日本从中国唐朝引进了许多算学书，并在选拔行政官员的考试中使用了这些算学书. 其中有公元前后的中国的《九章算术》.《九章算术》是中国的最古老的数学著作①,正如书名那样它是由九章组成的. 在它的"方程章"中早已有了联立方程组的方法. 把英语中的"equation"②翻译为"方程"原因在于，《九章算术》中方程章的解与西方的方程的解完全相同.

如果认为"左左立"早在奈良时代③已经存在，那么就让人

① 作者写此书时,《九章算术》是流传下来的最古老的数学书,但现在并不是这样. 据考古发现,出土于江陵县(今荆洲市荆洲区)张家山 274 号墓的《算数书》,是公元前 186 前成书的数学著作. 于 2002 年《算数书》注释本由科学出版社出版.

② Equation 比方程包括更多的内容,如高次式,在中国不叫方程.

③ "奈良时代"是日本中央政府形成的时代(710—784),首都在奈良.

怀疑这种游戏是不是根据《九章算术》等著作的数学知识而编写的东西①.

此外,在文政 13 年(1830 年)喜多村信节写的《嬉游笑览》中有如下论述:

"击鼓射字.

此儿戏,算法中称其为左左立.如,分钱三十文,按一文和二文(比例)分配时,对方每次都发'洒洒'声,注意数发声数,若共发声十八次.答曰:一文者就得钱六文.

法曰:倍出声数,得三十六,减原钱数三十文,则得余数六,即为一文者的发声数.不管所付钱数几何,道理皆同.又三十文之数减发声数十八,倍余数十二,得廿四,此数为二文者的钱数."

这一段文字和"左左立"完全相同.引起我们注意的是"击鼓射字"这个名称.这恐怕不是日本人起的名称.由名称可以判断这肯定是从中国传进来的,但至今在中国古文献中尚没有发现有关游戏的记载. [28]

第 4 节　分油的计算问题

1. 日本的分油问题

至今日本国出版的数学书籍中,最早出版的是毛利重能的《割算书》(1622 年),其次,是吉田光由的《尘劫记》(1627 年)和《算用记》(1628 年,作者不详).

《尘劫记》多次被修订出版,宽永 8 年(1631 年)的《尘劫记》下卷 42 中有"分油问题",有如下的分油的计算方法.这是日本最早的分油问题的计算.原文如下:

"斗桶中有油一斗(十升),七升升和三升升各有一.今欲油

① 《九章算术》中没有类似问题.

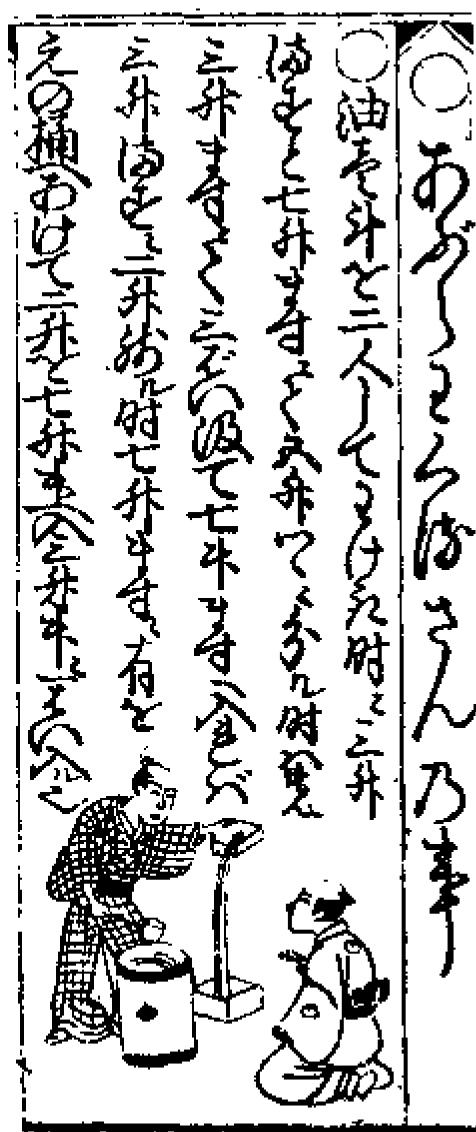


图 28

分两个五升时，先用三升升往七升升倒三次油，三升升中剩二升油，随后把七升升中的油倒至十升桶中，再将三升升中的油倒于七升升中，又三升升中倒满油，则把油分成各一半."

该问题为：1 斗（1 斗等于 10 升）桶中有 10 升油，现在只有 7 升桶和 3 升桶两个，用这两个桶把 10 升油平分为各 5 升.

原文说明如下：首先，如(1)有 10 升、7 升、3 升的容器.(2)10 升桶

(1)	⑩	⑦	③
(2)	10	0	0
(3)	1	7	2
(4)	8	0	2
(5)	8	2	0
(6)	5	5	0

图 29

[29] 中已装满了油，从 1 斗桶中往 3 升桶 3 次倒油，再往 7 升桶中倒，结果 3 升桶中剩 2 升油. 这就是(3).(4)把 7 升桶中的油全
[30] 部倒到 1 斗桶中.(5)把 3 升桶里的 2 升油倒入 7 升桶中. 最后的(6)中，从 1 斗桶往 3 升桶里倒满油，再把 3 升桶的油倒入 7 升桶中，那么，在 1 斗桶中剩油 5 升，7 升桶中也有了 5 升油.

《尘劫记》是一种非常好的通俗数学书. 从 1627 年到明治年代的 250 年间出版了类似于《尘劫记》的数学书 400 多种. 在这些书中都有分油计算问题，因此，分油计算问题是家喻户晓的.

但正如下面要论述的那样，编写简单数值的分油计算问题并

不容易.因此,在日本与此不同的分油计算问题只有一道题.明历3年(1657年),藤冈茂之的《算元记》中对问题的由来作了如下说明.

"在山崎买3斗2升一樽油.四人等分,今有7升桶有一,四人持一斗桶三,如何分配."

		一	二	三	
(1)	㉜	⑩	⑩	⑩	⑦
(2)	32	0	0	0	0
(3)	5	10	10	0	7
(4)	5	10	10	7	0
(5)	5	10	3	7	7
(6)	0	10	8	7	7

图 30

这是用三个10升桶和一个7升桶4等分32升油的问题.对此给出了如下解答方法.

"答曰:先四归3斗2升油,以为各8升.分油者把1斗桶按一二三的顺序放置,倒满一、二斗桶和7升桶时,樽中的剩油为5升,7升桶的油移之斗桶三,由斗桶二的油移之7升桶,又原樽中5升油移之斗桶二,斗桶有8升油.以尺测之,确定为定桶.以定桶向4人4等分油."

把32升油平分给4个人,各得8升.因此,如图30(3),一、二号1斗桶和7升桶中倒满油.其后把7升桶的油倒入三号1斗桶.这就是(4).在(5)中,由二号1斗桶往7升桶倒满油后所剩的油3升.在二号桶的3升油上再倒入原来的樽中5升油就得到8升油.随后,用尺子作一个记号当作标准,进行分油.

2. 问题的历史和存在的问题

我想读者明白了以上问题的意思.虽然在日本仅有上述两种分油计算问题,但它是广泛而长久地流传下来并引起了日本人祖先兴味的问题.

至今的研究尚不清楚一般地在什么情形下该问题能够成立.实际上,没有探求问题所成立的一般方法.日本和算中的问题大多是来自中国的数学书,但是,在至今的研究中还没有发现中国数学书中有分油计算问题.

分油计算问题,在和算初期的《尘劫记》(1631 年)中第一次出现,因此,也许是因宽永锁国以前的传教士将数学书带到日本的缘故.实际上,宽永 8 年(1631 年)以前,在意大利的达塔利亚(Tartaglia,1500—1557)和巴舍(Bachet,1581--1638)的书中有分油计算问题.但是问题中的数字不同,如果从数学史的整体考虑的话,也得不出从西方传进来的确切证据.现在,人们认为西方和日本可能各自独立地创造了分油计算问题.

德国数学史家 Ahrens[1] 认为,该问题出现在 13 世纪中叶. 1484 年,法国人 Chuquet 叙述了把 8 升葡萄酒用 3 升和 4 升的桶平分的问题.意大利人 Tartaglia 也提及此事.因此,西方人把分油计算问题叫做 Tartaglia 分配问题或 Bachet 问题.

日本最早的科学书《元和航海书》于元和 4 年(1618 年)出版.写该书时参考了珀如托嘎尔的天文学著作.另外,在宽永[2]锁国以前,数学和天文学方面造诣很深的传教士来到了日本.三
[31] 浦按针给德川家康教授数学的事情是家喻户晓的.

正因为这样,由于中国的数学书和日本古代奈良和平安朝时代的古文献中都没有关于分油计算问题的记载,我们就可以推测,分油问题的计算也许是西方传教士带到日本的.

暂且不说,正如后面介绍的分油计算问题那样,要作出具有价值的问题是非常困难.从这个意义上说,《尘劫记》中分油计算问题不愧是一个杰作.

---

① Ahrens,即 W. E. M. Ahrens(1872 -1927),有人说他是比利时人.

② “宽永”是日本后水尾天皇的一个年号,行于 1624--1629.

3. 西方的问题

在 1612 年的 Bachet 的著作中介绍了以下四个问题分别有两个解答方法.

	a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
(1)	⑧	⑤	③	⑧	⑤	③
(2)	8	0	0	8	0	0
(3)	3	5	0	5	0	3
(4)	3	2	3	5	3	0
(5)	6	2	0	2	3	3
(6)	6	0	2	2	5	1
(7)	1	5	2	7	0	1
(8)	1	4	0	7	1	0
(9)	4	4	0	7	1	3
(10)				4	4	0

图 31

	a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	
(1)	⑯	⑨	⑦	⑯	⑨	⑦	⑯	⑪	⑥	⑯	⑪	⑥	
(2)	16	0	0	16	0	0	16	0	0	16	0	0	
(3)	7	9	0	9	0	7	10	0	6	0	10	6	
(4)	7	2	7	9	7	0	10	6	0	6	10	0	
(5)	14	2	0	2	7	7	4	6	6	6	4	6	
(6)	14	0	2	2	9	5	4	11	1	12	4	0	
(7)	5	9	2	11	0	5	15	0	1	12	0	4	
(8)	5	4	7	11	5	0	15	1	0	1	11	4	[32]
(9)	12	4	0	4	5	7	9	1	6	1	9	6	
(10)	12	0	4	4	9	3	9	7	0	7	9	0	
(11)	3	9	4	13	0	3	3	7	6	7	3	6	
(12)	3	6	7	13	3	0	3	11	2	13	3	0	
(13)	10	6	0	6	3	7	14	0	2	13	0	3	
(14)	10	0	6	6	9	1	14	2	0	2	11	3	
(15)	1	9	6	15	0	1	8	2	6	2	8	6	
(16)	1	8	7	15	1	0	8	8	0	8	8	0	
(17)	8	8	0	8	1	7							
(18)				8	8	0							

图 32

	a	b	c	a	b	c
(1)	㊷	㉗	⑫	㊷	㉗	⑫
(2)	42	0	0	42	0	0
(3)	15	27	0	30	0	12
(4)	15	15	2	30	12	0
(5)	27	15	0	18	12	12
(6)	27	3	12	18	24	0
(7)	39	3	0	6	24	12
(8)	39	0	3	6	27	9
(9)	12	27	3	33	0	9
(10)	12	18	12	33	9	0
(11)	24	18	0	21	9	12
(12)	24	6	12	21	21	0
(13)	36	6	0			
(14)	36	0	6			
(15)	9	27	6			
(16)	9	21	12			
(17)	21	21	0			

图 33

这里没有必要说明这些问题的意义了. 其中的任何问题都是很复杂的，当作一个即兴游戏可能会感到困难. 但在最后问题的第二个解答中，如果像《尘劫记》那样用 12 升的桶二次倒油，则问题就被简化了.

下面从夫瑞(Fourrey)的著作和波尔(Ball，1850—1925，英国人)的著作中各列举一个问题. Ball 的著作中说："有三人得到了 24 盎司①葡萄酒. 匆匆忙忙来商店想买玻璃容器，商店里只有 5 盎司、11 盎司和 13 盎司的容器. 那么，这三人如何把 24 盎司葡萄酒分成各 8 盎司?"接着说明了有趣的分

① 盎司：英美制重量单位，是一磅的十六分之一，亦称英两.

配方法[①].

最后问题中的13,11,5升的容器被13,11,7升的容器所代替后也能够把24升三等分.

在杜德尼(Dudeney,1857—1930,英国人)的著作中扩展的问题有如下两个:

	a	b	c	a	b	c				
(1)	⑫	⑦	⑤	⑫	⑦	⑤	㉔	⑬	⑪	⑤
(2)	12	0	0	12	0	0	24	0	0	0
(3)	7	0	5	5	7	0	0	8	11	5
(4)	7	5	0	5	2	5	16	8	0	0
(5)	2	7	3	10	2	0	16	0	8	0
(6)	9	0	3	10	0	2	3	13	8	0
(7)	9	3	0	3	7	2	3	8	8	5
(8)	1	3	5	3	4	5	8	8	8	0
(9)	4	7	1	8	4	0				
(10)	11	0	1	8	0	4				
(11)	11	1	0	1	7	4				
(12)	6	1	5	1	6	5				
(13)	6	6	0	6	6	0				

图 34

(i) 有一个圣诞之夜,有三人把樽中12升啤酒三等分,但眼下只有3升和5升的瓶子.用这两个瓶子怎样把12升啤酒等分给三人?但是,该问题中必须用到别的容器. [33]

(ii) 有一个人有两个10升樽[②]、5升和4升的容器各一个,这两个容器中如何各装3升?

---

① 将24个盎司分成5,11,13盎司是不可能的.24个盎司大约等于680克,5盎司顶多有142克.在波尔的书中说的是香脂,容量单位为英品脱,符号为UKpt=0.568 261分米.(大矢真一)

② 樽:一种容器。

(1)	⑫	⑤	③	甲	乙	丙	⑩	⑩	⑤	④
(2)	12	0	0	0	0	0	10	10	0	0
(3)	7	5	0	0	0	0	5	10	5	0
(4)	7	2	3	0	0	0	5	10	1	4
(5)	7	0	3	2	0	0	9	10	1	0
(6)	7	3	0	2	0	0	9	6	1	4
(7)	4	3	3	2	0	0	9	7	0	4
(8)	0	3	3	2	4	0	9	7	4	0
(9)	0	5	1	2	4	0	9	3	4	4
(10)	0	5	0	2	4	1	9	3	5	3
(11)	0	2	3	2	4	1	9	8	0	3
(12)	0	0	3	4	4	1	4	8	5	3
(13)	0	0	0	4	4	4	4	10	3	3

[34]

图 35

4. 问题的展望

等分葡萄酒或油的量(a)和两个容器(b,c)之间应该有什么关系？关于这个问题，在阿廉斯的著作中介绍了波松(Poisson, 1781—1840，法国人)在数学方面的研究，这里仅简单地介绍他的结果.

(i) 使得问题成立，b,c 必须是互素的. 当然 a 为偶数. 在图 33 的例题中，a,b,c 被 3 整除.

(ii) 必为 $a\leqslant 2b+2c$.

(iii) 如果 $b+c-1\leqslant a$，则有两个不同的解. 最先的例题就属于这个情形.

(iv) 如果 $b+c-1=a$，则一个解比其他解简单.

(v) 如果 $b+c-1>a$，则存在唯一的解或完全没有解. 举例如图 33.

(vi) 扩大二等分的情形，进行了按任意比例(当然指的是整数比)等分的研究. 在此情形下，能够用两种方法分配.

用两种方法分配正如图 31 的例题所示. 在两种方法中,虽然 8 能被现实地分配成 1,2,3,4,5,而要得到 6,7,如 $6=3+3$,$7=5+2=4+3$ 那样合算为好.

前面的四个例子都不满足条件 $b+c-1\leqslant a$,故不能按任意整数比分配. 例如,在上页的第一例中就不能得到 4 和 10 的量.

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
14	11	5	16	11	7	14	11	6	20	17	9
14	0	0	16	0	0	14	0	0	20	0	0
3	11	0	5	11	0	8	0	6	11	0	9
3	6	5	5	4	7	8	6	0	11	9	0
8	6	0	12	4	0	2	6	6	2	9	9
8	1	5	12	0	4	2	11	1	2	17	1
13	1	0	1	11	4	13	0	1	19	0	1
13	0	1	1	8	7	13	1	0	19	1	0
2	11	1	8	8	0	7	1	6	10	1	9
2	7	5				7	7	0	10	10	0
7	7	0									

图 36 [35]

Ahrens 进而研究了如下情况在($a=16$,$b=12$,$c=7$)时没有解.

如果 b 和 c 互素,且 $b+c-2\leqslant a\leqslant 2b+2c+1$ 时,作为按整数比分配的事例举出了

$$a=20,\qquad b=13,\qquad c=9.$$

并主张这时只有一个解决方法.

第 5 节　岛立和十不足

1. 岛立

这两个游戏收录在中根彦循的《勘者御伽双纸》中,由于在

其他书籍中没有记载，现在只能以中根的原文的说明为依据来介绍. 原文中有“分组算之事”. 对“岛立”的注解如下①：

“如何将棋子分配成相同数目的几组，其组数为：例如分5组，在4和5之间也分开，之后，将其中的1组作主人组，其余4组放置在一起，并命名为下人组. 然后，从主人组中的1人移人到下人组，再给其余的主人上供下人组. 上供的下人

[36] 叫做挑衣物箱的伺从、或拿草鞋的伺从、或年轻的武士伺从. 给每1位主人上供4名伺从. 所谓的4人是：如果起初为5组，则必上供4人；如果起初为6组，则必上供5人. 总之，上供的人数比起初组数少1个. 上供结束时，所剩下的下人数就等于起初的组数，若为5组，则有5人；若为6组，则有6人.

现在设起初为5组，使1人到长崎，1人到大阪买东西，使1人到爱宕，让其余2人留守，使得等于组数. 例如，各由7人组成的5组中主人组有7人.

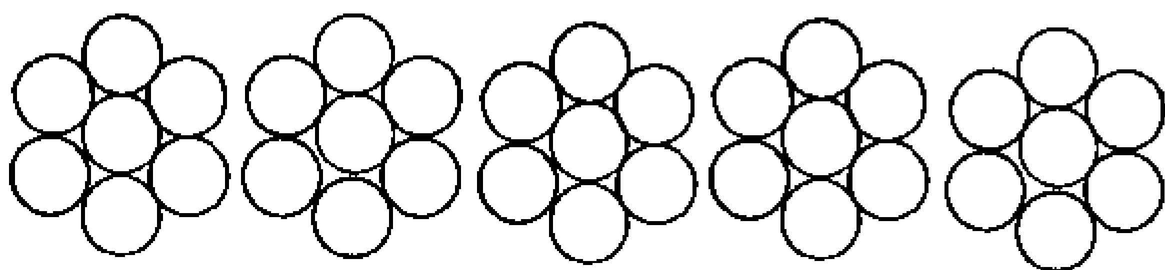


图 37

从主人组中将1人移人到下人组，决定其余6人为主人，将这6人排列在最前头，如果给每一主人上供4人，那么(每一)下人组剩下5人. 如图38：

① “岛立”的说明：设最初的组数为 a，其中，主人组为1组，其余为下人组. 故若给主人组的1人派给 $a-1$ 个下人，则下人组变为0. 但在这一段叙述中，开始时从主人组那里给下人组递给了1个棋子，因而从下人组没有给主人组派人的必要了. (大矢真一)

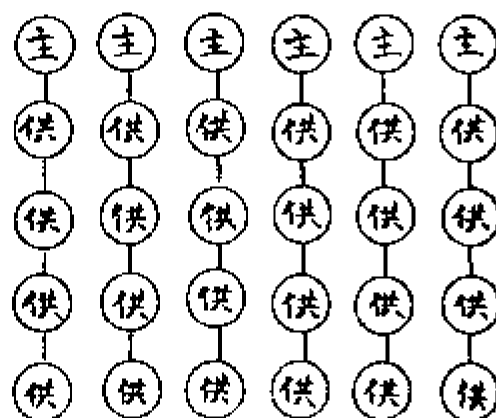


图 38

剩下 5 人. 长崎○,大阪○,爱宕○,留守○○.

同理,当 4 组为下人,1 组为主人时,从主人组中将 2 人移入到下人组,若给每一位主人安排 4 个下人,则剩下 10 人. 若从主人组中将 3 人移入到下人组,则所剩下的下人为 15 人. 依此类推."

不易理解以上引文,下面进一步阐明. 有每一组为 y 人的组共有 x 组. 将这些组重新排列为 $(x+1)$ 组. 由于给每一位主人上供 $(x-1)$ 人,所以 1 组的人数为 x.

这里,最初的人数为 xy. 然后变为 $x(x+1)$. 这样人数之差为

$$xy-x(x+1)=x(y-x-1),$$

这就是所剩下的人数. 问题在于使所剩下的人数等于组数. [37]
即

$$x(y-x-1)=x,$$

$$\text{故 } y-x-1=1,$$

$$\text{故 } y-x=2.$$

原文中就说明了 $y=7, x=5$.

2. 十不足

现在在西方文献中还没有发现与"岛立"类似的问题. 要是勉强的寻找的话,那就是"狼之渡船"的问题了. 将在后面要介绍

该问题的变形问题.

西方虽然有与“十不足”问题相似的问题，但还不清楚其来源. 可以说，它就是类似于猜谜那样的问题.

将若干个棋子分成 2 组，每一组必须少于 9 个(这个少于 9 个的要求类似于“十不足”问题). 但乙不让甲知道两个组里各有多少棋子，不过甲通过下面的对话能够猜对两组各有多少棋子.

[38] 甲:“这样，5 乘以一组，再加 3，然后再乘以 2，最后再加上另一组的棋子. 问共多少?”

乙:“得 31.”

甲:“那么一组有 2 个，另一组有 5 个棋子.”

这样，确实能猜中两组棋子的个数.

设一组的个数为 a，另一组的个数为 b，那么甲所进行的计算为

$$(a\times5+3)\times2+b=10a+b+6.$$

由于上式等于 31，所以

$$10a+b+6=31,$$

即

$$10a+b=31-6.$$

从 31 减去 6 后，能够判定 10 位和个位数 a,b.

这里的 a,b 必须小于 9.

第 6 节　狼之渡船

这虽然是一个家喻户晓的问题，但在明治以前的日本古文献中还没有发现它. 问题中说:

“有一个人带着一只狼、一只羊和一筐菜出门旅行. 渡船时，只有一小舟. 不能一次乘小舟渡船. 主人以外，还有狼、羊和蔬菜. 可是主人不在时，就存在

‘狼食羊，

羊食菜’

的问题.主人仔细考虑，最后平安无事地渡了河.”

该问题有两个解答方法.

第一解：

(1) 首先，让羊过河.

(2) 其次让狼过河，然后又带回羊.

(3) 再次带菜过河.

(4) 最后让羊过河. [39]

第二解：

(5) 首先，让羊过河.

(6) 其次带菜过河，然后又带回羊.

(7) 再次让狼过河.

(8) 最后让羊过河.

该问题的起源不明，但这是比西方阿尔库恩(Alcuin，735－804)和达塔利亚(Tartaglia，1500—1557)的传说还要古老的问题.

此外，还有把狼、羊和蔬菜代替为士兵和小孩的变形问题.

还有改变问题内容的如下问题：

“这里有三对夫妇.有一天他们一起远足，遇到一条河，但是只有一个小舟.小舟只能承载两人.而且不允许妇人当丈夫不在时和别的男人在一起.那么三对夫妇如何过河?”①

这个问题本身是很容易的，作为数学游戏没有多少意味，但不是三对夫妇而是 n 对夫妇的情况下，最少几次过河才能都过河? 或者在中途有岛又如何? 有诸如此类的扩展的问题.

① 译者注：此题在卡约黎著，曹丹文翻译，《初等算学史》中出现，商务印书馆，1925 年，第 185 页.

第7节　乌鸦算问题

宽永4年(1627年)吉田光由的《尘劫记》中首次出现了乌鸦算.

"云乌鸦算之事.

今有乌鸦九百九十九只,每只到九百九十九处,每到一处叫九百九十九声.问题叫声共几何?

答曰:合计九亿九千七百零零二千九百九十九叫声.

法曰:九百九十九只,乘以九百九十九处,有九十九万八千零零一处,又乘以九百九十九,即得九亿九千七百零零二千九百
[40] 九十九."

把该问题可表示为

$$999^3=997\ 002\ 999,$$
$$99^3=970\ 299,$$

没有什么数学技巧可谈.只表示了非常大的数字而已.

类似的问题早在中国古代的《孙子算经》中就已经有了:

今有出门,望见九堤,堤有九木,木有九枝,枝有九巢,巢有九禽,禽有九雏,雏有九毛,毛有九色,问各几何?

答曰:木八十一,枝七百二十九,巢六千五百六十一,禽五万九千四十九,雏五十三万一千四百四十一,毛四百七十八万二千九百六十九,色四千三百四万六千七百二十一.

[41] 这是1 000年以前的问题,在程大位的《算法统宗》(1593年)[①]中以诗歌形式给出了类似的问题:

诸葛统领八员将,每将又分八个营,

每营里面排八阵,每阵先锋有八人,

每人旗头俱八个,每个旗头八队成,

① 《算法统宗》成书于明万历二十年(1592年).

每队更该八个甲，每个甲头八个兵.

答曰：一千九百一十七万三千三百八十五人.

这是以诸葛孔明的军队组织为例编写的例子. 现在还没有吉田光由研读《孙子算经》的证据，但他确实读过《算法统宗》，因此，我们推测吉田光由可能是根据《算法统宗》想出了“乌鸦算”问题.



图 39

有意思的是西方也有类似问题. 在 Cajori（卡约黎）的数学史书中①有如下问题：

我赴圣地爱弗司，

路遇妇人数有七.

一人七袋手中携，

一袋七猫不差池；

一猫七子紧相随；

猫及猫子，布袋及妇人，

共有几何赴圣地爱弗司？

但是与此形式相同的问题出现在 3 600 年以前的古埃及的阿米斯王朝时代，问题如下：

七位妇人去面黑斯，每人牵七匹骡马. 每匹骡马上驮七个袋，每一个袋中装七个面包，每一个面包上插七把小刀，每一把小刀有七个鞘.

---

① 译者注：Cajori（卡约黎）《初等算学史》有中文版本，20 世纪 30 年代，商务印书馆两次出版发行了曹丹文翻译的《初等算学史》，一为算学丛书本（1925 年），一册；一为“万有文库”本，上下两册（1936 年）.

问共有几何赴面黑斯？

无论是在中国、西方，还是在日本的早期数学书中都有类似

[42] 的问题，这实在是令人费解.

日本的《尘劫记》和中国的《孙子算经》中举出以下问题，是为了表示使用 9 的数就会急速增大的事实：

$$999\times999\times999=997\ 002\ 999,$$

$$9\times9\times9\times9\times9\times9\times9\times9=43\ 046\ 721.$$

关于这样的问题，在西方提出："3 次使用 9 能得到的最大数是什么？"的问题. 这并不是

$9\times9\times9=729$. 因为这数小于 999.

也不是

$$99^9=913\ 517\ 247\ 483\ 640\ 899.$$

因为这数比 9^{99} 要小. 9^{99} 是一个 94 位数字，但还有更大的数字，就是 9^{9^9}. 这就是 9 的 9^9 次方，即

$$9^{387\ 420\ 489}=428\ 124\ 773\cdots$$

大概有 3 亿 6 969 万 3 100 位数，用 1 000 册书也写不下来的.

以上是在乘法和指数允许的情况下说的. 如果在阶乘、即 $9!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9$ 等情形下，问题就会变成另外一个问题了.

还有，如果 4 次使用 9，则我们可以考虑更大的数字，即

$$(9^9)^{(9^9)}=387\ 420\ 489^{387\ 420\ 489} \text{以及} 9^{9^{9^9}}=9^{9^{387\ 420\ 489}}.$$

这是一个超天文数字.

第 8 节　倍增问题

[43] **1. 曾吕利新左卫门**

太阖秀吉问曾吕利新左卫门想要什么时，新左卫门答道：第一张垫子上置一粒米，第二张垫子上置二粒米，第三张垫子上置四粒米，第四张垫子上置八粒米，第五张垫子上置十六粒米，依

次类推，想要全部. 这是一个有名的传说.

实际上，进行计算的话，当六张垫子时，

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=2^6-1=63\text{ 粒}.$$

当8张垫子时，

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7=2^8-1=255\text{ 粒}.$$

当16张垫子时，

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{15}=2^{16}-1=65\ 535\text{ 粒}.$$

假如1升米为5万或6万粒的话，那么16张垫子需要1升米. 又加倍到32张垫子时，就有

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{31}=2^{32}-1=4\ 294\ 967\ 295\text{ 粒},$$

这就是16张垫子的10万倍. 由此可见，这样随着垫子数的增加而米的粒数增加得非常大.

秀吉在新左卫门的聪明智慧面前只好认输了. 现在我们还不清楚这个问题的来源. 也许是新左卫门独立想出来的东西.

中国明代的《算法统宗》中有：

今有钱一文，日增一倍，增至三十日，问该若干？

很显然这个问题和新左卫门的问题有相同的趋向，但是《算法统宗》的出版年代是万历20年(1592年)，又是朝鲜之役的时代，新左卫门不可能看到《算法统宗》.

在印度古代传说中说，Schahram(或 Shihram)王想赐给家来的 Sissa ben Dahir 小麦时，家来说：在棋盘上的第一眼上放1粒，第二眼上放2粒，第三眼上放4粒，依次类推到放完整个棋盘的64个眼就可以了. 我们一计算就得： [44]

$$\begin{aligned}1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}&=2^{64}-1\\&=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616-1.\end{aligned}$$

如果按照日本棋盘计算，那么 $2^{81}-1$. 无论是哪一个都是非常庞大的数字.

我不认为新左卫门可能知道印度的这个传说.

2. 吉田光由的问题

在日本吉田光由的《尘劫记》中最早提到上面的问题. 宽永4年(1627年)的第一版中没有该问题. 在宽永8年(1631年)和宽永11年(1634年)的改版本中在“日日一倍之事”题目下,说明了“使钱一文日日一倍”和“置芥子一粒日日一倍”问题.

宽永18年(1641年)改订版中以“象棋盘眼一眼一粒米”为例说明该问题. 原文如下:

“象棋盘之一眼置一粒米,次又置二粒. 其后,每眼增一倍,问盘上米几何?

米四十京二千九百七十五兆二千七百卅二亿零四百八十七万六千三百九十一石五斗六升八合七夕二才五撮二粒也. 日本国内之万万斗不足.”

即

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{80}=2^{81}-1.$$

这里把一升换算为6万粒.

《尘劫记》中忘记了 $2^{81}-1$ 中减1. 万治2年(1659年)出版的《改算记》的作者山田正重严厉批评了这个疏忽,说:“虽为一粒,却此一粒之误,比之右边数百京粒之误大事矣.”所谓芥子的数百京粒的错误,就是下面将要论述的《尘劫记》的芥子数计算

[45] 的错误.

关于40京2 975兆2 732亿0 487万6 391石5斗6升8合7夕2才,有如下说明.

“问将上面米堆起来高如何?

答曰:九十五里廿一街廿八间五尺二寸八分四方,此为右同前也(即上面米堆之高).

此堆米多于日本之作物加之大唐①四百州之作物也.”

---

① 大唐:指唐朝时期的中国.

接着又说：

“有一米店门前，米与马粪堆积颇多．有人见之，向店主问道：一日一粒，次日二粒，其后以前一日之二倍拾米，能否拾米卅日？若门前米不足，是否由仓库里取米？店主以为小事一桩便同意．然见取出来之米，有合百七十八石九斗五升七合也．店主亦惊叹不已．”

这是一个很有趣的变形问题、说明了数量的惊人之大．

与后面的鼠算问题一起把此类统称为“积算”．《尘劫记》中列举了很多类似的问题，最后再举一个芥子问题．

“将芥子一日增一倍地放置，百廿日芥子之数如何？

答曰：6 646 沟 1 399 穰 7 892 秭 4 579 垓 3 645 京 1 903 兆 5 301 亿 4 017 万 2 288 粒也”（原文为汉字）

以上之数，若将其堆成四方六面体，其数为 [46]

15 万 5 392 里 9 町 31 间 1 尺 7 寸 2 分 7 厘 5 毛 6 面．

上面余数有 1 秭 0 164 垓 4 411 京 7 004 亿 9 337 万 9 117 粒．（原文中没有兆）

开立方之，得

16 里 3 街 3 间 3 尺 2 寸 9 分 7 厘 5 毛．

上面之余数为

2 京 5 557 兆 7 689 亿 2 992 万 4 438 粒．”

这里，把 4 粒芥子的长度当作 1 分来计算的．

如前所述，在《改算记》中指出了这个计算中的 100 京的错误．

这些都是摘自江户时代①最早、最好的教科书《尘劫记》．

① “江户时代”，江户是日本城市名，16 世纪～19 世纪中期曾为德川家康幕府所在地，称为“江户时代”．明治天皇于 1868 年奈良迁都于此，改称东京．

第9节 鹤 龟 算

1. 鹤龟算的历史

鹤龟算是算术四则运算的问题，一直被人们青睐. 事实上，这个问题的原形在 1 700 年以前的中国汉晋时代的《孙子算经》中已经有了. 孙子是人名，但和著名军事家孙子不是同一个人.

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何?

经过 1 000 多年后，到中国的元和明代，问题中的“雉和兔”
[47] 变成为“鸡和兔”. 例如，程大位的《算法统宗》(1593 年)中说：

今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔若干?

朱世杰的《算学启蒙》(1299 年)也一样. 于是，这个问题一直被人们喜欢着. 宽永(1624—1643)初期中国数学传入日本之际，这个问题最早传到了日本.

最早的文献是今村知商在宽永 17 年(1640 年)写的《因归算歌》. 文中说：

“又雉兔头合三十二个，此脚九十四个，雉十七羽，兔十五只. 此式亦差分.”

这里的“差分”是指把某一个数按一定规则分配的计算，也就是一种比例分配.

这里又变成“雉和兔”，与古代的《孙子算经》相同. 至今的研究中还没有发现今村知商曾经读过《孙子算经》的证据，但是这个问题肯定是随着中国的某部数学书传入日本而传进来的.

后来，今村知商的著作《算法阙疑抄》(宽文元年，1661 年)中也有“雉和兔”问题，但其他数学书中都有“鸡和兔”问题.

这个问题后来被改变为“鹤和龟”问题，不过这是较晚出现

在坂部广胖的《算法点窜指南录》(文化 12 年，1815 年)中．

“某处有鹤龟百头，只云足数和为二百七十二，问鹤龟各几何？

答曰：鹤六十四，龟三十六．

术曰：置龟之足数(四)，减鹤足数(二)，以余(二)为法，置某处鹤龟之数(100)，乘以龟足数(4)，得四百，又减总足数(272)，得余数一百二十八，用法除之，得六十四，此为鹤之数．”

“鹤与龟”名称的出现是 150 年以前的事了，可是这个问题本身已经有 1 700 多年的历史，而且一直被人们青睐．

化归原题，《算法统宗》第九卷“均输章”里，有如下的类似问题： [48]

“今有狐狸一头九尾，鹏鸟一尾九头，只云前有七十二头，后有八十八尾，问二禽兽各若干？”

明治 2 年(1869 年)出版的《算法珍书》(作者不详)中，也有如下变形题：

“金太郎，在足柄山上以天狗和熊作为朋友一起游玩．有一天，母山姥数其友人时，头七十七，足二百四十四．问天狗和熊各几何？但熊有四足，天狗有二足也．

答曰：天狗有三十三，熊四十五．”

2. 鹤龟算的变形

如果鹤和龟变成 3 种，那么问题有什么变化呢？关于这样的问题，在村井中渐的《算法童子问》(1784 年)中有如下问题：

“鸡、狗、章鱼之事．

窥厨下，见庭院里有鸡和狗，菜墩上有章鱼．庖人曰：三种合有二十四个，足数有百二足．问鸡、狗、章鱼各几何？但，鸡有二足，狗有四足，章鱼有八足．”

这个问题有五个不同解答：

答曰:狗 3 只,鸡 13 只,章鱼 8 条

狗 12 只,鸡 7 只,章鱼 5 条

狗 15 只,鸡 5 只,章鱼 4 条

狗 18 只,鸡 3 只,章鱼 3 条

狗 21 只,鸡 1 只,章鱼 2 条

对于为什么出现若干个解答,村井中渐作了如下解释:"上
[49] 面足数百贰,合廿四个.若鸡兔算中增一种,必外加探讨.于是答数不限定于一种,而有若干."现在,设狗、鸡和章鱼分别为 x,y,z,那么有

$$x+y+z=24,$$
$$4x+2y+8z=102.$$

这是一个三元一次方程组,但方程少一个.因此,这是求不定方程的整数解的问题,有几个整数解是要讨论的问题.

随后,村井中渐又介绍了下面的问题①:

"从高栏上见庭前池,有六眼龟,又有三足蛙.不知其数.足数合为九十三,眼数合为百二.问龟与蛙数各几何?"

问题中,假设了龟的眼有 6 个,足有 4 个,蛙的眼有 2 个,足有 3 个,总足数为 93 个,眼数为 102 时,龟和蛙的数各几个?

答,龟 12,蛙 15.

第 10 节　鼠　　算

1. 鼠算

众所周知,鼠算这个名称最早出现在宽永 8 年(1631 年)的《尘劫记》中.这以前的日本数学书和中国数学书中都没有出现过.

---

① 这原来是《算法统宗》卷 15 中的问题,这里只把原来的团鱼改为蛙.

《尘劫记》中，有鼠的画和如下介绍：

正月ね	うまれ子 十二疋	おやともに 十四疋
二月ね	うまれ子 八十四疋	おやともに 九十八疋
三月ね	うまれ子 五百八十八疋	親ともに 六百八十六疋
四月ね	うまれ子 四千百十六疋	親ともに 四千八百二疋
五月ね	うまれ子 二万八千八百十二疋	親ともに 三万三千六百十四疋
六月ね	うまれ子 廿万令千六百八十四疋	親ともに 廿三万五千二百九十八疋
七月ね	うまれ子 百四十一万千七百八十八疋	親ともに 百六十四万七千令八十六疋
八月ね	うまれ子 九百八十八万二千五百十六疋	親ともに 千百五十二万九千六百令二疋
九月ね	うまれ子 六千九百十七万七千六百十二疋	親ともに 八千令七十万令七千二百十四疋
十月ね	うまれ子 四億八千四百九十四万三千二百八十四疋	親ともに 五億六千五百六十五万令四百九十八疋
十一月ね	うまれ子 卅三億九千五百九十五万令三千九百八十六疋	親ともに 卅九億五千四百五十四万三千四百八十四疋
十二月ね	うまれ子 二百卅七億二千七百九十二万令九百十六疋	親ともに 二百七十六億八千二百五十七万四千四百令二疋

图 40

“鼠算之事.

正月，鼠父母，生十二子.父母与子共为十四.二月，鼠父母与子一起又生十二子，父母与子共一百九十八.如此，每月生一次，父母、子及其孙子继续生.问及十二个月后为若干时，共有二百七十六亿八千二百五十七万四千四百二只.” [50]

从正月到十二月鼠的总数增长为

正月	父母	2 只	二月	生子	84 只
	子	12 只		共	98 只
三月	生子	588 只	四月	生子	4 116 只
	共	686 只		共	1 802 只
五月	生子	28 812 只	六月	生子	201 684 只
	共	33 614 只		共	235 298 只

七月	生子	1 411 788 只	八月	生子	9 882 516 只
	共	1 647 086 只		共	11 529 602 只
[51] 九月	生子	69 177 612 只	十月	生子	484 243 284 只
	共	80 707 214 只		共	564 950 498 只
十一月	生子	3 389 702 988 只	十二月	生子	23 727 920 916 只
	共	3 954 653 486 只		共	27 682 574 402 只

最后论述了计算方法.

"法，鼠二只乘七之十二次乘方，即得上述数."

即

$$2 \times 7^{12} = 27\ 682\ 574\ 402 \text{ 只}.$$

当然，在计算中言外之意是所生的 12 只鼠子雌雄各为 6 只.

《尘劫记》又提出了下面的问题：

"今有鼠二百七十六亿八千二百五十七万四千四百二只，此一鼠一日食米半合，一日共食米几何？

答曰：米一千三百八十四万一千二百八十七石贰斗一合.

如果将鼠头接尾地在大海上连接起来，那么其长度相当于入唐①的距离.

即七十八万八千六百七十七里十贰街八寸.

这里，一里为卅六街，一街为六十间，一间为六尺五寸，鼠长为四寸."

《尘劫记》的记述全部结束了. 虽然计算了里数，但当时人们并不清楚从日本到中国的距离，所以究竟能否入唐，吉田光由也没有能够正确判断②.

《尘劫记》是日本第二个成书的数学著作，是颇有兴趣的书. 上述问题被统称为"积算"，《尘劫记》中类似的问题相当多.

---

① 入唐：指日本到中国大陆的距离.

② 《拾芥抄》中记载"大唐和日本之间有三千七百余里."因此吉田光由可能知道日本和中国的距离.

2. 斐波那契级数

西方也有类似的研究. 大约 1220 年，意大利著名数学家斐波那契(Leonardo Fibonacci，1170—1250)就研究了这个问题. [52]
他研究的问题如下：

有一对兔子. 这一对兔子每月生一对兔子，各对兔子从第二月开始生一对兔子，那么，最初的一对兔子一年后变成多少对兔子?

解释说明为，一个月后兔子为一对，两个月后生一对兔子，共成为 1＋1＝2 对兔子.

3 个月后，最初的一对兔子又生一对兔子，共成为 2＋1＝3 对兔子.

4 个月后，两个月以前已经有了的兔子各生一对兔子，合计 3＋2＝5 对兔子.

如果继续这个过程，那么得到如下图表：

1 个月后 1	2 个月后 2	3 个月后 3	4 个月后 5	5 个月后 8	6 个月后 13
7 个月后 21	8 个月后 34	9 个月后 55	10 个月后 89	11 个月后 144	12 个月后 233

图 41

观察兔子对数

1，2，3，5，8，13，21，34，55，…①

后发现，每一个项分别等于其前面的两个项之和. 把这个级数叫做斐波那契级数. 斐波那契级数的有趣的性质被人们研究，而且有专门的读物，这里列举其中的一个有趣的性质.

① 中国方中通《数度衍》中有类似问题. 见吴文俊主编《中国数学史大系》第七卷，北京师范大学出版社，2000 年，第 137—138 页.

第11节 斐波那契级数

1. 花的旋涡

如前所述的斐波那契级数

[53] 1，2，3，5，8，13，21，34，55，…

在数学理论上有许多有趣的性质，不可思议的是在自然界中也存在着这个性质.似乎完全没有秩序的植物的枝条彼此相隔的距离或叶子的生长方式，都被斐波那契级数支配着.

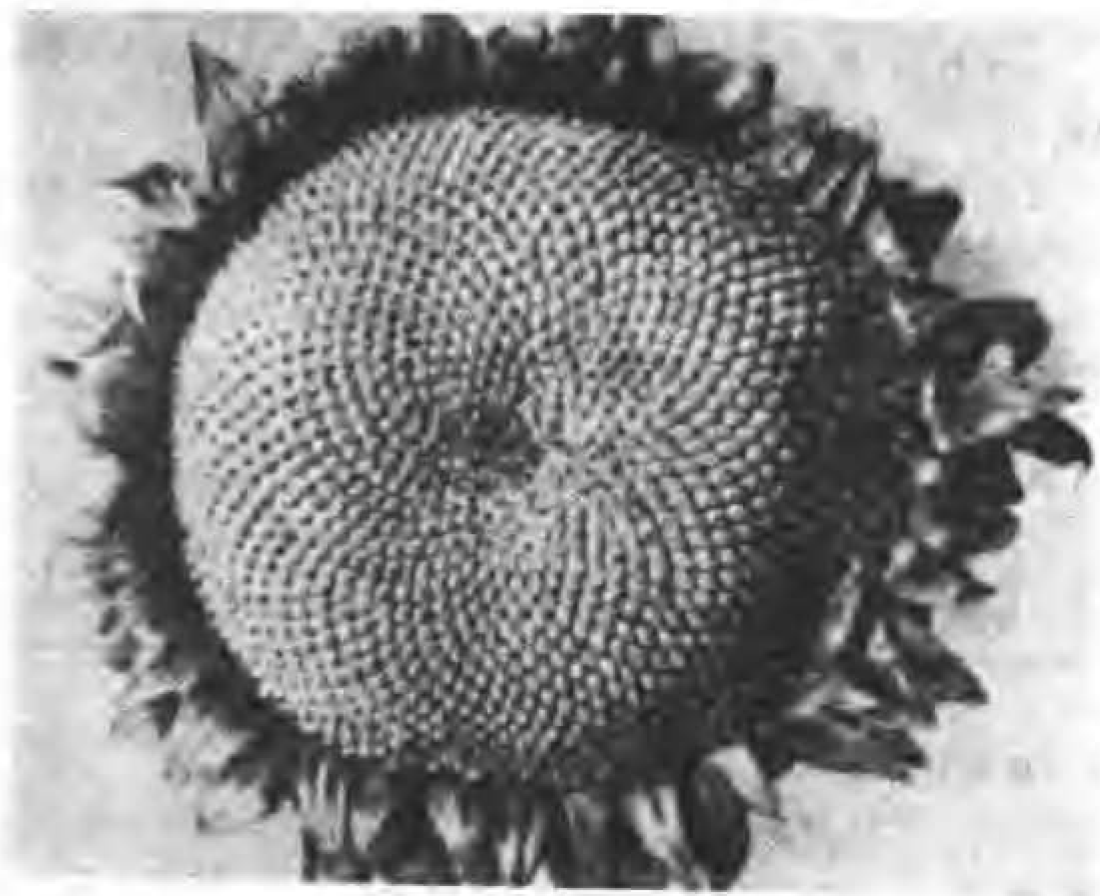


图 42

首先，从最容易理解的东西开始说明吧. 夏天，我们观察一下盛开的向日葵. 我们就会注意到右向和左向的旋涡. 数一数究竟有多少条旋涡后就会发现，如果右旋有 21 条，那么左旋就是 34 条或 13 条. 即上述斐波那契级数的相邻项

(5,8),(8,13)(13.21),(21,34),……

都是成对出现的.

向日葵的情形下不容易数,但是在松果或菠萝的情况下就很容易把旋涡数出来.虽然因大小而有所不同,但一定会成对的出现(5,8),(8,13).

图 43 为最简单情形的图解.左图为(3,5)的情形,右图为 [54]
(5,8)的情形.

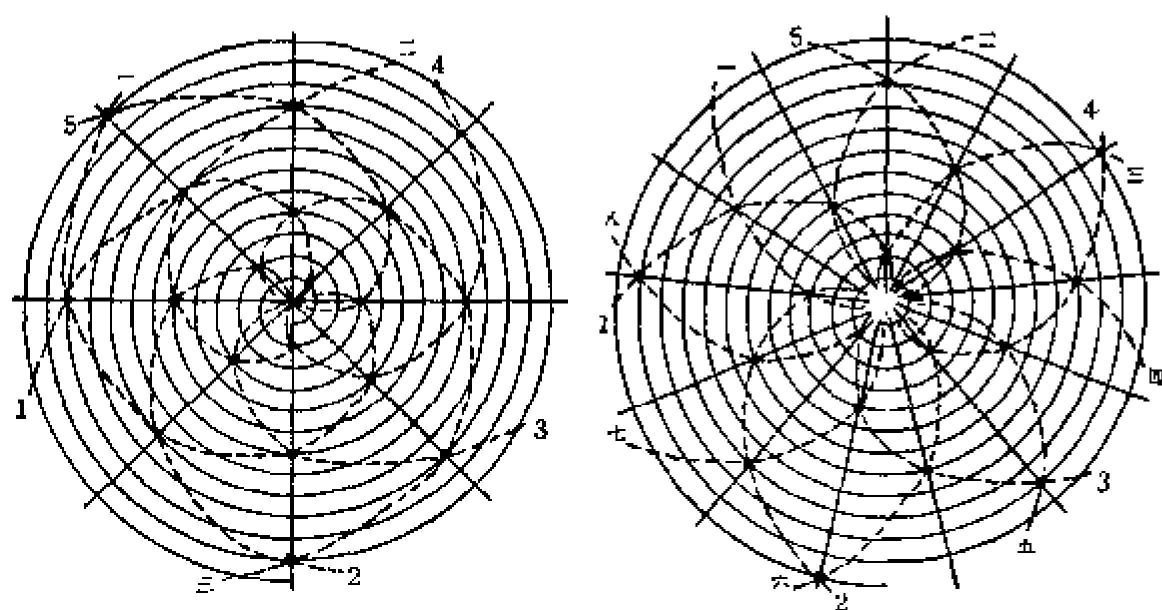


图 43

2. 枝条的开度

在植物学上把枝和叶子等统称为枝条.枝条的生长有一定的规则,把这个叫做开度.例如,开度$\frac{1}{2}$就是螺旋上升 1 周时,生长 2 根枝条,如竹子的枝条那样.如果开度为$\frac{3}{5}$,那就是说明螺旋上升 3 周时长出了 5 根枝条.

开度的分子和分母就是上述斐波那契级数.即

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{21},\frac{21}{34},\cdots$$

这不是理论，是从丰富的植物学资料中得到的，令人惊奇地吻合了数学家斐波那契的级数.

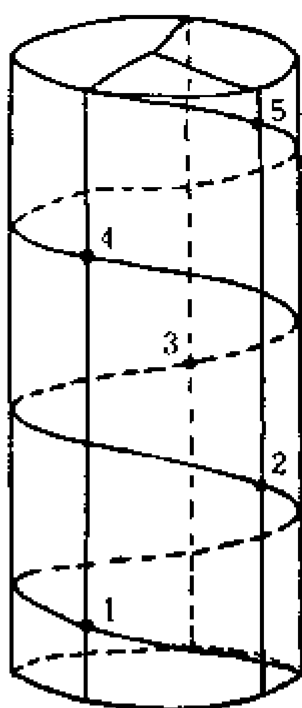


图 44

现在再图解一下最简单的开度$\frac{2}{3}$. 由于转 2 周时生长 3 根枝，就能够画出它的图. 在实际的植物中，1 与 4，2 与 5，3 与 6，有相同方向的枝. 植物学家对樱花树皮上的斑点进行调查研究的结果，得到了开度$\frac{3}{5}$，柳树的开度是$\frac{8}{13}$.

植物不是圆柱形，而是圆锥形的. 如，考虑松果时，从它的正上方看时就呈现旋涡形，正如图 43 所示那样.

[55] 图 43 左图的开度为$\frac{3}{5}$. 从中心引 8 等分的半直线，作将 5 周 8 等分的点时，出现了左向 5 个，右向 3 个螺旋.

图 43 右图的开度为$\frac{8}{13}$. 出现了左向 5 个，右向 8 个螺旋.

第 12 节　百鸡问题

古代中国曾经出现过许多优秀的数学著作. 1700 多年以前的汉晋之际的《张丘建算经》中有如下问题：

"今有鸡翁一直钱五，鸡母一直钱三，鸡雏三直钱一，凡百钱鸡百只，问鸡翁母雏各几何？"

设鸡翁、鸡母和鸡雏分别为 x,y,z，那么有

$$x+y+z=100,$$

$$5x+3y+\frac{z}{3}=100.$$

解不定方程得

$$\begin{cases}x=12,\\y=4,\\z=84;\end{cases}\quad\begin{cases}x=8,\\y=11,\\z=81;\end{cases}\quad\begin{cases}x=4,\\y=18,\\z=78.\end{cases}$$

这不是一个单纯的不定方程问题，作为用 100 钱买 100 只鸡的问题，引起人们的兴趣.现在尚不清楚这个问题是如何传到 [56]
日本的.日本明历 3 年(1657 年)柴村藤左卫门写的《格致算书》中，第一次出现了下面的百鸡问题：

"今有碗一值二十文，盘一值一文，七器五值一文，各买几何，钱百文买百器?"

设各种器具数目分别为 x、y，z，得

$$x+y+z=100,$$

$$20x+y+\frac{z}{5}=100.$$

解得，$x=4$，$y=1$，$z=95$.

两年后，山田正重写的《改算记》中有这样的问题：

"有钱币一串 (960 文)，买瓜、茄子、桃三种时，瓜一值钱二文，茄子三值钱一文，桃八值钱一文. 买三种九百六十. 此时，

瓜四百卅，此钱八百六十文，一值钱二文，

茄子百六十二，此钱五十四文，三值钱一文，

桃三百六十八，此钱四十六文，八值钱一文."

在日本江户时代，把 100 文叫百钱，并省去 4 文，即把 96 文当 100 文来通用. 因此，用一串钱 960 文买三种 960 个东西.

设瓜、茄子、桃分别为 x，y，z，那么把问题转化为解下列方程组：

$$x+y+z=960,$$

$$2x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{8}z=960.$$

据《改算记》的说明，首先确定 $x=430$，只有上述一个解. 这虽然没有错误，但是不充分. 应该有 63 组解，这里却只求出了一
[57] 组.

从两个方程中消去 z，得

$$9x+y=4\ 032.$$

由于 $9x$ 被 9 整除，4 032 也被 9 整除，所以 y 应该是如下的被 9 整除的数

$$0,9,18,27,36,\cdots$$

这样能够求出 63 组整数解. 宽保 3 年(1743 年)出版的中根彦循的《勘者御伽双纸》中指出了这一点.

关于百鸡问题，在印度和阿拉伯的数学著作中也能见到. 如，大约在 900 年的埃及的 Abu Kamil Shodja ibn Aslam 写的 "Das Buch der Seltenheitene der Rechenkunst" 中，花 100 Drachmen[1] 买鸭子、鸠、Dingeltauben、云雀和鸡五种鸟一共 100 只的问题. 此外，在印度的 Bhaskara 的 Vija Ganita 和 Leonardo Pisano[2] 的 Liber Abaci 中也有类似问题. 在西方把这类问题叫做阿波其特问题. Alcuin 的著作中是作为 Abbot of Canterbury 问题而出现的[3].

无论在中国、日本还是在西方，数学发展的初期都出现过同类问题，这是一个引人注目的现象，这不会是偶然的巧合吧？这个问题最终对日本数学的进步和发展起到原动力的作用.

最后，明和 6 年(1769 年)出版的有马赖徸的《拾玑算法》中

---

① Drachmen，英文为 Drachme，古希腊的硬币，也是度量衡单位.

② Leonardo Pisano，就是斐波那契.

③ Abbot of Canterbury 问题：将 100 公斤谷物分配给 100 人，男人一人 3 公斤，女人每人 2 公斤，小孩每人 0.5 公斤. 问男人、女人和小孩各有几个人？（平山谛）

介绍了一个问题：

“今，买桃、李、杏三种果，果数多于钱数 47. 桃 31 个为 1 文，李 2 个 5 文，杏 7 个 13 文. 求最小数.”

设桃、李、杏分别为 x,y,z，那么有

$$x+y+z=\frac{3}{31}x+\frac{5}{2}y+\frac{13}{7}z+47.$$

解得

桃	62 个	价	6 文
李	2 个	价	5 文 [58]
杏	7 个	价	13 文

这是求不定方程的一般解的问题.

彼得问题

8 世纪的数学家彼得（Bede Venerable[①]）提出了一个问题：

“大人、妇人和小孩有 18 人. 他们吃了 18 个面包. 如果大人每人吃了 2 个，妇人每人吃了 1 个，小孩每人吃了 $\frac{1}{2}$ 个，那么大人、妇人和小孩各几何？”

这是“百鸡问题”的一种.

第 13 节　三人骑两匹马

这是一道《尘劫记》中的有名问题. 即“三人骑两匹马走三里路，且骑马路程都相等”之问题.

“一人先骑二里路，步行一里路；一人先骑一里路，步行一里路，再骑一里路；一人先步行一里路，再骑二里路也.”

① Bede Venerable，即 Bede Venerabis（672—735），音译为彼得-维涅拉彼利斯，英国人.



[59]

图 45

这是 3 人平均地骑 2 匹马行完 3 里路程的问题. 用图 46 就可以很好地说明:

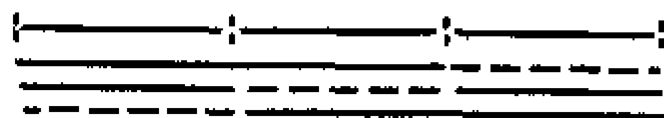


图 46

这个问题也有各种各样的变形形式.

(1) 3 人以 30 天期限借来了和服裤裙 2 条,每人穿 20 天.

(2) 4 人骑 3 匹马走 6 里路程.①

---

① 这类问题早在中国明朝王文素《算学宝鉴》(1513 年)中已经出现.

第14节　百五减算

在日本，百五减算是从奈良和平安朝时代开始流传到现在. 这个名称也是流传已久了. 可能是从《孙子算经》来的. 唐代的李淳风注释过《孙子算经》，因此，《孙子算经》是唐代以前的著作. 它意味着叫孙子（不是兵家孙子）的人撰写的算经著作. 有《孙子算经》在日本奈良时期传入日本的证据. 在西方文献中还没有见到百五减算问题.

1. 百五减算的原形

百五减算的《孙子算经》原文如下：

"今有物，三三数之，剩二. 五五数之，剩三. 七七数之，剩二. 问物几何？答曰：二十三." [60]

在《孙子算经》中有如下解释：三三数时，余数乘以 70 得 140；五五数时，余数乘以 21 得 63；七七数时，余数乘 15 得 30. 三个得数相加得 233. 由 233 两次减去 105 得 23. 这就是答案.

由于减 105 的缘故出现了"百五减算"之名称. 理由如下：

设物之数为 N. 用 3,5,7 除 N 得的数分别为 x, y, z，余数分别为 a, b, c，则

$$N=3x+a,$$
$$N=5y+b,$$
$$N=7z+c.$$

用 70,21,15 分别乘上面三个等式两边并相加，得

$$106N=210x+105y+105z+70a+21b+15c$$

而 $106N=105N+N$，因此有

$$N=105(2x+y+z-N)+70a+21b+15c.$$

又 x, y, z, N 为整数，故 $(2x+y+z-N)$ 为整数. $(70a+21b+15z)$ 是上面已经说明的式子，由此式减去 105 整数倍为所求.

这个数学问题，让人产生棋子游戏的感觉.我们还不清楚在奈良和平安朝时代是以什么形式叙述这个问题的.宽永 8 年(1631 年)的《尘劫记》中也有这样非常有趣的问题，这也是最早论述该问题的著作.

[61] “百五算.

有棋子八十六，但不知其数为八十六，当问其为几何时，曰：

七七减剩二，
五五减剩一，
三三减剩二，
有八十六也.”

于是有

$$N=7x+2,$$
$$N=5y+1,$$
$$N=3z+2.$$

分别用 15,21,70 乘，并相加等式两边得

$$15N+21N+70N=105x+105y+210z+30+21+140,$$
$$N=105(x+y+2z-N)+191.$$

故由 191 减去 105 就可以了.即得数为 86.《尘劫记》中给出如下解答方法：

“法：七七数之剩二，乘以十五，置卅，又五五数之剩一，置二十一，又三三数之剩二，乘以七十，置百四十，三数合百九十一，百以上，以百五减之，即得八十六.”

到这里已经明白了问题的意思，用 7 除某数时的余数乘以 15，用 5 除时的余数乘以 21，用 3 除时的余数乘以 70，并相加这三个数，再减去 105，就求得原来的数.

更有趣的是用棋子解答这个问题.给别人演示时，必须记住 15,21,70 这三个数.这个问题在中国也是被当作游戏来操作的.万历 20 年(1592 年)程大位著作《算法统宗》中也有如下问题：

物不知总，孙子歌曰，又云韩信点兵也. [62]

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

七子团圆正半月，除百令五便得知.

“孙子歌”，是指把《孙子算经》中的问题改变成歌诀的意思.“韩信点兵”意味着，按歌诀操作计算，就如韩信点兵那样快速和谐. 歌词的意思就是：“以每三人一组组成 70 人是稀事. 五树的梅花有 21 条枝. 七个小孩有 15 个团圆. 减去 105 就立即得所求数字.”这只是停留在记忆数字上，除此之外没有意义. 最后的“除百令五”是指减去 105.

关于为什么是 15，21，70，用同余式说明如下：

$$x \equiv 2 \pmod 7,$$
$$x \equiv 1 \pmod 5,$$
$$x \equiv 2 \pmod 3.$$

因此，$5\times3=15$ 的倍数 $\equiv 1 \pmod 7$，$x_1=15$；$7\times3=21$ 的倍数 $\equiv 1 \pmod 5$，$x_2=21$；$7\times5=35$ 的倍数 $\equiv 1 \pmod 3$，$x_3=70$，故，

$$\begin{aligned} x &\equiv 2x_1+x_2+2x_3=2\times15+21+2\times70 \\ &\equiv 191 \pmod{105=3\times5\times7}. \end{aligned}$$

2. 百五减算的变形

我们已经很好地理解了百五减算. 下面再介绍一下宽保 3 年（1743 年）中根彦循的《勘者御伽双纸》中的说明. 该书中第一次出现了“三百一十五减算”和“六十三减算”.

(i) 百五减算

“百五减之事.

石子有若干. 予人时，七、七减，五、五减，三、三减，听其余数，便知其总数也. [63]

如，七、七减剩三；五、五减剩一；三、三减剩二，问其总数为若干.

答曰：总数为一百零一也.

法曰：七、七减之剩三，置四十五；五、五减之剩一，置廿一；三、三减之剩二，置一百四十，并三者成二百六，由此减一百零五（若多余一百零五时若干次减一百零五）剩一百零一.

又，无论七、七减之、五、五减之，三、三减之，无余数时，不考虑它.又皆无余数时其总数必为一百零五."

(ii) 三百一十五减算

"又，三百十五减之事.

如，五、五减之，则剩三.七、七减之，则剩四.九、九减之，剩五.

答：总数为一百五十八.

法曰：将五五减得余数一的数设为一百二十六，置三百七十八；七七减得余数一的数设为二百二十五，置九百；九九减得余数一的数设为二百八十，置一千四百.合并三者得二千六百七十八，从该数依次减去三百五十，最后剩一百五十八."

(iii) 六十三减算

"又，六十三减之事.

如，七、七减之，剩三.九、九减之，剩五.

答：总数五十九.

法曰：七、七减得余数一的数设为三十六，置一百零八，九、九减得余数的数设为二十八，置一百四十，合并二者得成二百四十八，由此依次减去六十三，最后剩五十九.

上面的任何一个分配给第一人的石子数，皆为减至限度（减到不能再减的程度）为止即可."

在(ii)的三百十五减算中，设以 5，7，9 除某数时的余数为 a,b,c，则

$$N=5x+a,$$
$$N=7y+b,$$
$$N=9z+c.$$

将以上三式两边分别乘以 126,225,280,并相加,得

$$631N=630x+1575y+2520z+126a+225b+280c,$$

即

$$N=315(2x+5y+8z-2N)+126a+225b+280c.$$

由此可知,上述问题成立.

(iii) 的六十三减算中同样有

$$N=7x+a,$$
$$N=9y+b.$$

用 36,28 分别乘以上二式两边,并相加,

$$64N=252x+252y+36a+28b,$$

即

$$N=63(4x+4y-N)+36a+28b.$$

由此可见,乘数(126,225,280),(36,28)过于大了以后,问题显得缺乏趣味性了.在"百五减算"的情形下,由于乘数(70,21,15)较小,问题也就一般化了.

下面再看看与"百五减算"原理相同的"年当"游戏①.

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20		

[65]

如,假定有一个 20 岁的人.开始列 11 块石子,如上面那样数一数.于是出现不足 2 个的情况.

其次,列 9 块石子,同样的数一数.

○	○	○	○	○	○	○	○	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20							

① "年当"游戏出于《勘者御伽双纸》.(大矢真一)

这次出现了不足 7 个的情况.

对于前面的不足 2 和不足 7,进行下面的计算:

$$
\begin{array}{r}
51\times 2=108\\
44\times 7=308\\
\hline
416
\end{array}
$$

$$416\div 99=4\cdots\text{余数为 }20$$

余数 20 就是想要猜对的岁数(年). 这里,54,44,99 是与石子的数 11,9 相关的定数.

又如,当不足数为 7、6 时,有

$$
\begin{array}{r}
54\times 7=378\\
44\times 6=264\\
\hline
642
\end{array}
$$

$$642\div 99=6\cdots\text{余数为 }48$$

即,48 就是猜对的岁数(年).

由于用 99 除,其余数小于 99,但这并不妨碍实际情况. 正因为这样,选择了石子数 11,9 和 54,44,99.

我想再没有必要说明这个原理了.

达塔利亚问题

[66] 这是意大利文艺复兴时期的数学家达塔利亚提出的问题,与“百五减算”类似.

“旅行者问牧羊人‘有多少羊?’,牧羊人回答说:‘无论 2,2 个数,3,3 个数,4,4 个数,5,5 个数,6,6 个数,余数都是 1,但 7,7 个数时正好数完.’羊究竟有多少?”

第 15 节 谜 语 之 算

西方虽然没有与“百五减算”相当的问题,但借此机会这里也收集了类似的问题.

(1)

甲:"请在纸上写出某一数字.再用9乘一下.从这个数字中消去一个非零数字.然后请相加余下的各位数字."

这样甲让乙做了如上程序.例如,当乙回答最终结果为13时,甲立即猜对被消去的数字.

答:5.

理由 例如写217,

$$217\times9=1\ 953.$$

消去5,然后$1+9+3=13$.因1 953被9整除,故其各位数之和也被9整除.因13大于9,故被9整除得的最小数为18与13的差5就是所求.

(2)

甲:"请写某一数字.此数加11,乘以2.再减20,又乘以5.再减去最初的某数的10倍.于是得10."

听完,乙进行下面计算,结果就得出10.

假如,最初的数为7,那么 [67]

$$7+11=18,18\times2=36,$$

$$36-20=16,16\times5=80,$$

$$80-70=\boxed{10}.$$

理由 一般的,设最初的为n,那么

$$\{(n+11)\times2-20\}\times5-10n=10.$$

(3)

甲:"请写大于3的素数.乘方此数,加17.然后再尽量地由和数减12.那么得数为6."

乙听后,写了7,

$$7\times7=49,49+17=66,$$

$$66-(12+12+12+12+12)=\boxed{6},$$

结果正是6.

理由　一般地,$6n\pm1$ 的形式表示大于 3 的素数.此数的平方为

$$36n^2\pm12n+1.$$

再加 17,即加 12+5,得

$$36n^2\pm12n+12+(1+5).$$

用 12 连续除后得余数 6.

(4)

甲:"写某一数.乘以 37 后加 17,再乘以 27 后加 7.由此连续减 999 后得 466."

乙先写了 7,

$$7\times37=259,259+17=276,$$

[68] $$276\times27=7\ 452,7\ 452+7=7\ 459,$$

$$7\ 459\div999=7\cdots(\text{余数为 }466).$$

没有必要再说明理由了.

(5)

甲:"写某一数.作该数的 15(设 a)倍,加 63(设 b),以 3(设 c)除和数.又由此减去最初的数的 5 倍,就得 21."

当然,甲并没有说括弧内的内容.

乙用 7 进行了计算

$$7\times15=105,105+63=168,$$

$$168\div3=56,7\times5=35,56-35=\boxed{21}$$

理由　设最先写的某数为 n,那么

$$\frac{na+b}{c}-\frac{na}{c}=\frac{b}{c}=\frac{63}{3}=21.$$

(6)

甲:"请写下两个三位数.用这两个三位数作两个六位数.若用最初的两个三位数的差,除两个六位数的差,那么就得 999."

乙用 226 和 871,进行了如下计算:

$$871\ 226-226\ 871=644\ 355,$$

$$871-226=645,$$

$$644\ 355\div 645=\boxed{999}.$$

理由 设两个三位数为 p,q(但是 $p>q$),那么,六位数分别为

$$1\ 000p+q,1\ 000q+p,$$

$$\{1\ 000p+q-(1\ 000q+p)\}\div(p-q)$$

$$=\{1\ 000(p-q)-(p-q)\}\div(p-q)=999.$$

(7) [69]

甲:"从 1 到 9 的数中写出不同的三个数字,并写出由这三个数组成的全部二位数字.把这些二位数字之和除以原来数字的和就等于 22."

乙选出了 2,5,7,

$$25+27+52+57+72+75=308,$$

$$2+5+7=14,$$

$$308\div 14=\boxed{22}.$$

理由 设三个数为 p,q,r,

$$10p+q+10p+r+10q+p+10q+r+10r+p+10r+q$$

$$=22(p+q+r).$$

(8)

甲:"请写出一个任意的四位数."乙写出了一个四位数.接着甲又说:"在它的下面再写出两个任意的四位数."乙也写出来了.这样,甲迅速地在那些数的下面写出了两个数.

甲立即能够计算出这五个数的和.

乙,5687
乙,3825
乙,8481
甲,6174
甲,1518
―――――
25685



上式中,前三个数是乙写出的,后两个数是甲写出的.

理由 答案中第一个数字是 2,剩下的四位数字比最初的数字少 2. 故甲写的两个数和乙写的两个数之和为

$$3\ 825+6\ 174=9\ 999,8\ 481+1\ 518=9\ 999.$$

因此,甲能够立即写出这些数的和.

(9)

对这个游戏,可以作如下的变形:

甲:“请写出任意一个四位数.”乙写出四位数,甲立即于其
[70] 下面写出了四位数.

再重复一次这样的过程. 最后甲又说:“请再写出一个任意的四位数.”乙写了一个四位数,那么甲就能够立即计算出这五个数的和.

乙,2 837

甲,7 162

乙,5 919

甲,4 080

乙,5 777

这些数的和为 25 775. 这里不再说明了. 这两个问题对于 5 位数和 6 位数的情况也成立.

(10)

同理,我们可以知道下面的性质.

写出任意两个不同的二位数. 交换一位和二位数的位置,并写出它们的差. 再交换这个差的一位和二位的位置,加在原来的差上,那么就得 99.

任意两位数	14
交换各位数	41
写出差	27
交换各位数	72
计算出和	99

同样，对三位数进行这个操作后得 1 089，对四位数进行后得 9 999 或者 10 890[①]。

170	8351	5621
071	1538	1265
099	6813	4356
990	3186	6534
1089	9999	10890

(11) [71]

甲："请写出某一数. 2 倍该数，加 4，除以 2，又加 7，乘以 8，减 12，又除以 4，再减 11，进而减 4，除以 2，那么，就会得到原来的数."

7；14，18，9，16，128，116，29，18，14，7.

理由

$$\left\{\left(\frac{2n+4}{2}+7\right)\times 8-12\right\}\div 4-11=2n+4.$$

(12)

甲："请写出某一数. 此数乘以 2，加某一偶数. 用 2 除它们的和，又乘以 4，又减前面所加的偶数的 2 倍，就得到原来数的 4 倍数."

设最初的数为 16，所加偶数为 12，那么

16；32，(12)，44，22，88，64.

理由

$$\frac{1}{2}(2n+12)\times 4-2\times 12=4n.$$

(13)

---

① 对 4 位数有以下计算规则：设千位上数＞十位上的数. (1)当百位上的数＞十位上的数时，最后的和为 10 890；(2)当百位上的数＝十位上的数时，最后的和为 10 989；(3)当百位上的数＜十位上的数时，最后的和为 9 999. (泉行藏)

甲："请写出某一数.乘以 2，加 1，又乘以 5，再减 5，那么就会得到原来数的 10 倍."

理由

$$(2n+1)\times 5-5=10n.$$

与此同理，可以考虑以下等式：

$$\{(n+2)\times 3-4\}\times 3+n-6=10n,$$

$$\{(n\times 5+2)\times 4+3\}\times 5+7-62=100n.$$

这种游戏非常多，有时变得相当复杂，因此，再举一些改变兴趣的问题.

[72] (14) 骰子点

甲让乙投掷 3 个骰子.乙不让甲知道出现的骰子点，按照甲说的话，进行下面的计算.

甲："把第一骰子的点数乘以 2.加 5，再乘以 5.再加上第二骰子的点数.加 10，再乘以 10.再加上第三骰子的点数.那么结果等于多少？"

乙："等于 603."

于是甲就会猜出骰子的点数.只要计算

$$603-350=253,$$

就知道骰子的点数分别为 2，5，3.

设，三个骰子的点数为 a,b,c，那么

$$\{(2a+5)\times 5+b+10\}\times 10+c=100a+10b+c+350.$$

这是从古代流传下来的游戏，有多种形式.代之三个骰子，还有三个人的手指上的戒指的个数问题的游戏.据说是意大利人斐波那契创造了这种游戏.

(15) 奇数和偶数

甲让乙一手里握住奇数个小石块，另一手里握住偶数个小石块.

甲对乙说："左手里个数乘以 2，右手里的个数乘以 3，那么两个数的和多少？"

乙回答:"16."

只进行这样简单的问答后,甲就会猜出乙的哪只手里有奇数个,哪只手里有偶数个小石块了.乙回答说有16,但他知道奇数和偶数就可以.

当乙的回答为偶数时,左手里有奇数个,右手里有偶数个.反之亦然.

因为奇数的形式为 $2a+1$,偶数的形式为 $2a$,故由下式可以知其所以然. [73]

左　　　　右

$(2a+1)\times2+(2b)\times3=2(2a+3b+1)$(偶数),

$(2a')\times2+(2b'+1)\times3=4a'+6b'+3$(奇数).

第16节　骰子游戏

前面已经介绍了骰子游戏,下面借这个机会再举两三个问题.

骰子是日本的奈良时代和平安朝时代的"双陆"游戏,由《徒然草》的文学书等文献中的记载可以知道它在古代就已经有了.古希腊也有骰子结构的诗歌.根据这首诗,骰子的相对点数为1,6,2和5,3,4,与日本的骰子游戏相同.

下面的两个游戏中,必须正确使用骰子.

(1) 两个骰子

有甲乙两人,甲让乙掷2个骰子.甲不知道出现哪些点数,猜答案过程如下.

甲:"请将两个骰子中一个的点数上加另一个的反面的点数."

乙:"10."

甲:"下面,请相加两个骰子反面的点数."

乙:"等于7."

甲只听了这些立即计算出了

$$\{21-(10+7)\}\div 2=2,$$

即正确地猜出了第一个骰子的点数为 2.

理由 设第一次出现的两个骰子的点数分别为 x,y,那么

[74] $$(7-x)+y=10,$$

$$(7-x)+(7-y)=7.$$

解方程组得

$$x=\frac{21-17}{2}.$$

由于 17=10+7,21 是一个定数,甲才作出了上述方法.

(2) 三个骰子

下面是一个人的游戏.

首先,掷三个骰子,用出现的三个点数作三位数.不改变骰子的顺序,用反面出现的点数又作一个三位数.

用这两个三位数再作一个六位数.这个六位数

(i) 被 3 整除.

(ii) 被 3 整除后,也被 37 整除.

(iii) 被 3 和 37 整除所得的数减去 7,就被 9 整除.

(iv) 被 9 整除后,不可思议地出现原来骰子点数.

例如,设掷骰子后出现的点数为 3,1,5,反面的点数为 4,6,2.故对于 315 462 有

$$315\ 462\div 3=105\ 154,$$

$$105\ 154\div 37=2\ 842,$$

$$2\ 842-7=2\ 835,$$

$$2\ 835\div 9=315,$$

即命题成立.

理由 设骰子的三个点数所作的三位数为 a,那么用反面点数作的三位数为 $777-a$.连接这两个三位数,就是

$$1\ 000a+(777-a),$$

作如下变形

$$999a+777=111(9a+7),$$

故这个六位数被111,即被 $111=3\times 37$ 整除.从被整除得的结 [75]
果减去7,再除以9,就返回原来的 a.

如果把最初两个骰子的点数之和的问题改变为三个骰子时问题就会发生变化.

第17节 约数的检验

在骰子问题中,$111=3\times 37$ 的因数分解是中心问题.我们从小学开始学习了某一数是否被

$$2,3,4,5,6,8,9$$

整除的检验方法.但7,11,13,17,19并不是那么简单,因此,在下面介绍一下.

(1) 7,11,13的检验

将这三个数相乘后

$$7\times 11\times 13=1\ 001,$$

我们就利用这个性质.

"首先,把某一数从末位数开始三位三位地分割.被分割的三位数,将它们按奇数排序和偶数排序分开,再求出它们的和.这样,再作这两个和的差.这个差,当被7,11,13整除时,原来的数分别被7,11,13整除."

例如,取53 632 803.按三位数分割

$$53|632|803$$

奇数次的和为 $53+803=856$

偶数次的和为 632 [76]

这两个数的差为 $856-632=224$

因为224被7整除,故原来的数53 632 803也被7整除.

11,13的情形也相同.

(2) 7 的检验

上述是在较大数的情况下的方法，下面介绍较小数的情况.

“用 2 乘某数的末位数，当前数减去它后的余数被 7 整除时，原来的数就被 7 整除.”

如，取 1 869. 末位数 9 乘以 2 得 18.

$$186-18=168$$

因 168 能被 7 整除，故 1 869 被 7 整除.

(3) 13 的检验

“4 乘以某一数的末位数，加到末位数前面的数的和被 13 整除时，原来的数被 13 整除.”

如，取 338. 用 4 乘以末位数 8 得 32，加之 33 上得 65. 因 65 能被 13 整除，故 338 也被 13 整除.

(4) 17 的检验

“用 5 乘以某一数，由末位数的前面数减它，若余数被 17 整除，那么原来数也被 17 整除.”

(5) 19 的检验

“用 2 乘以某一数的末位数，当把它加到前面的数上的和被
[77] 19 整除时，原来的数被 19 整除.”

第2章 物语Ⅱ

第1节 关于九九

1. 九九的顺序

日本语有“五十音图”和四十七个字母，称为“あいうえお”和“いろわ”.英语有26个字母“ABC”等，头一个字母的读音在东西方都是相同.

乘法表无论是日本还是西方都是从一一得一，一二得二，二二得四，二三得六开始，到九九八十一结束，但在日本叫做“九九”，西方叫做“Einmaleins”，即“一一得一”.

作为东西方的相反例子，不知为什么没有结合点.在日本大正年间，国语学者山田孝雄博士进行考证后提出了以下假说：“古代，九九表是否从九九八十一开始到一一得一结束？”①

没过多久，数学史家三上义夫博士发现了证明这个假说成立的实例.下面将论述这一点.

有关数学书中记载，日本最早的数学文献是叫做《口游》的一本书.它是在天禄元年(970年)，源为宪是左亲卫相公藤原为光的儿子松雄(当时7岁)编写的一种教科书.这本书的部分内

---

① 中国古代春秋战国时代的“九九”即从九九到一一，继续到北宋都如此.

容也与数学有关，书中有下面的"九九表"：

九九八十一，八九七十二，七九六十三，六九五十四，五九四
[78] 十五，四九三十六，三九二十七，二九十八，一九九，

八八六十四，七八五十六，……一八八，七七四十九，六七四
十二，……，二二四，一二二，一一一，谓之九九.

其后，室町时代的一本百科辞典《拾芥抄》中也有同样顺序的"九九表".

《口游》　　《拾芥抄》

图 1

由此可见，在日本的平安时代和室町时代的"九九表"的读法顺序与现在的相反. 日本的数学是从中国传进来的，现在有奈良时期从中国传入日本的算学书的目录. 其中就有《孙子算经》，虽然《孙子算经》中没有具体的"九九"表，但有如下记载：

九九八十一，自相乘几何，答曰六千五百六十一，

八九七十二，自相乘得五千一百八十四，

七九六十三，自相乘得三千九百六十九，

……………………………………………

一二如二，自相乘得四，

一一如一，自相乘得一.

这是古代中国的“九九”表从九九八十一开始的证据.

实际上，从敦煌挖掘发现的《九九术残本简》中有如下“九九”表的记载. 这也成为了从九九八十一开始的证据.

诚然，后来受到中国影响的朝鲜数学书中也有从九九八十一开始的“九九”表. 最早的著作可能是南秉吉编写的《算学正义》(李太王 4 年，1867 年). 实际上，朝鲜到最近，在小学里还是从九九八十一开始来教“九九”表.

图 2　于 1867 年朝鲜出版的《算学正义》中从九九八十一开始读.

那么，何时开始变成从“一一得一”开始读“九九表”的呢？

中国的元、明时代的数学书中已经有了从“一一得一”开始读“九九表”的文献.[①]奈良时代从中国传入日本的数学,已经衰落了.江户时代的初期,再次从中国(明代)引进了数学,当时就是从“一一得一”开始读“九九”表.

九九八十一 八八六十四 五七三十五 二六十二 二三而六
八九七十二 七八五十六 四七二十八 五五二十五 二二而四
七九六十三 六八四十八 三七二十一 四五二十

图 3

[80]

2.《万叶集》[②]与九九

《万叶集》中也有从中国唐朝传播进来的“九九”表在古代日本已经普及了的证据.

《万叶集》中把“二二”读作“し”(四).这可能是“二二得四”被人们普遍知晓的原因吧.也有把“二五”读作“とう”(十)的情况,但相反地“十六”读作“しし”(四四)、把“八十一”读作“くく”(九九).

下面以《万叶集》第五卷中“算师志氏大道”的歌为例说明.日本古代也曾经有过算学博士的职务,但没有遗留任何数学方面的成就.也许《万叶集》的这首歌是数学家们所流传下来的唯一的成就.

“波流能努尔,奈久夜汙隅比须,奈都气牟得,和何弊能曾能尔,污米何波奈佐久.”[③]

在第六卷的开头,养老7年(723年)芳野离宫举行仪式时,朝臣金村所咏叹的歌词有:

① 在中国首次见于记载的“一一”到“九九”是南宋初洪迈(1123-1202)的《容斋续笔》卷6,叫“俗语算术”,可能是在民间流行.以后都是这样顺序.

② 《万叶集》,约8世纪日本最古老、数量最多的钦定诗选集,收入4 500多首,是许多人的作品.

③ 这里原文如此.使用汉字是当时日本文人的一种时尚.

"冲上之御舟乃山尔,水枝指.四时尔生有,刀我乃树能,弥继嗣尔,万代,如是二二知三,三芳野之."

第十一卷也有下面的歌:

"狗上之,鸟笼山尔有,不知也河,不知二五寸许瀲,余名告奈."

第六卷中,山部宿祢赤人唱的一句:

"朝猎尔十六履起之."

第十一卷中还有:

"若草乃.新手枕乎,卷始而,夜哉将间,二八十一,不在国."

上面歌词中利用了"九九"歌的读音,即按照数字的读音唱的歌.例如,十一卷中还有:

"言云者,三三二田八醋四,小九毛,心中二,我念奈九二."

另外,由于《万叶集》中有"唱""数",下面再举例说明.

卷四的丹比真人笠麻吕去筑紫国的时候,唱的歌为: [81]

"白妙乃,袖解更而,还来武.月日乎数而,往而来猿尾."

意思就是"数着回家的日月".

十一卷中有:

"时守之,打鸣鼓,数见者.辰尔波成,不相毛怪."

此外,在第七卷中还有"浪不数为而"的歌.第十三卷中也有"数物不敢鸭".

以上是说明《万叶集》的那个时代,"九九"乘法表普及的程度.

附记(1) 算所

镰仓时代及后来,出现了与绘师、番匠相同职业人的"计算的人".把他叫做"算置",进行计算的场所叫做"算所".

塙保已一的《群书类从》502卷"鹤冈放生会职人歌合"条中,有如下的歌:

"赏月者,怎知,

我定其圆与缺."

这是“算置”唱的一首歌，它的意思是：眺望着月亮唱着歌的人，他们不会知道我们通过计算来确定月的圆缺的苦心.

“欲记冗长之数，无置所，不计其数.”

因计算的数非常大而计算人员叫苦.

当时的日本正处于庄园制时代.地主或领主和小作人[1]之间可能发生了什么纠纷，小作人把与纠纷有关的东西拿到“算所”，请他们计算后没有得到满意的结果.

“三十二职人歌合”中说：

[82] “观夫人面相，花盛开时，迎风，云五行也.”

还有：

“置身于陋室，算所之人，惆怅怨恨.”

就夫人的“置算”这个意义上看，她摆好算具，唱着占卜的风水之歌.

(2)《宇治拾遗物语》的数学家

《宇治拾遗物语》第182章“高阶俊平弟人道算术之事”中有记载：

“今昔，有过叫丹后前司高阶俊平的人.后成为法师，称丹俊人道.其弟，无官职之人也.赐主人之允诺，赴筑紫国，习得新传播来的唐人之算.那时，习置算之事，先记忆于心，教之，使其渐渐置算，最终已牢固掌握置算.日本究竟有何？日本之置算之道，所到之处皆有之.唐人云，与我赴唐如何.”

故事中说，丹后的高阶俊的弟弟到筑紫国时，他在从大唐来的唐人那里学习数学，发挥了他超群的聪明才智.因此，唐人想带他赴大唐.这已经是1 000多年前的事情了.

在《今昔物语》中能看到相同的记载.

“吾妻镜”卷15的故事中说，宫城县的松岛，也有过在数学上颇有才能的僧人.《林鹤一博士和算研究集录》(1937年)下卷

① “小作人”大体是指地位低下的人.

中有详细介绍.

建仁寺第 12 世圆月和尚在应长元年(1311 年)12 岁时写的东西中有：

春在池房，就道惠和尚，读孝经论语，且学九章算法，秋归大慈寺.

由此可见，即使到了镰仓时代在僧院里还在学习数学.

《日本风土记》中说：

朝有阴阳士，名曰挨里由吉，朝有占卜士，名曰挨里木师，风水士名曰三和吉. [83]

第2节 数学之歌

数学的真正目的并不是为了教理论的，也不是上学考试的工具. 真正目的在于为社会发挥作用. 和算发展的初期，纯粹学术性的东西寥寥无几，只教授了很多实际问题，和算家也非常注意避免数学走向空洞理论.

日本数学史上，无论作为数学家还是数学教育家，具有名望的是藤田贞资(1734—1807)，他的著作《精要算法》(安永 8 年，1779 年)得到了日本第一名著的荣誉. 藤田贞资说：

今有有用之用之算数. 有无用之用之算数. 有无用之无用之 [89]
算数. ……无用之用为题术及异形之适等无极之术类. 虽然此为非急于人事，若讲习之，则为有用之佐助也.

因此，日本数学家在如何很好地记忆数学知识使它发挥作用上下了工夫. 日本最早出版的数学书是从元和 8 年开始的，它们的顺序为：

元和 8 年(1622 年)，《割算书》，毛利重能

宽永 4 年(1627 年)，《尘劫记》，吉田光由

宽永 5 年(1628 年)，《算永记》，作者不详

宽永 16 年(1639 年)，《竖亥录》，今村知商

宽永17年(1640年),《因归算歌》,今村知商.
其中,《因归算歌》完全是以歌诀形式解释了数学.



[90] 图4 《精要算法》序文　　《因归算歌》

1. 因归算歌

《因归算歌》中的"因"是指乘法运算,"归"是除法运算,即为用歌诀说明乘除运算.

毛利重能 ┬ 吉田光由
　　　　 ├ 今村知商
　　　　 └ 高原吉种——关孝和

《因归算歌》的作者今村知商是毛利重能的三个弟子之一.今村知商先出版的《竖亥录》中创造了新的术语,把数学第一次引入了研究领域.此书不易于理解,因此,他为初学者又编写了《因归算歌》.序文中说:

"古人所云'无人不知算,然无善算之人'为真也.我虽聪敏,

但从幼小时以算道为志向，博览群书，不问千里求师，尽心尽力，正方圆，晓得算术. 观今日之孩童，咏叹无用之歌，无恶不作，无论何时何地，虚度年华. 思此景象，作歌，三十一字之内，集成各种算，命名为算歌. 但愿孩童咏唱此歌，手持算盘，作为后日之宝. 时为宽永十七年于弥生，印，终. 学算造诣深者，应为《坚亥录》倾注心."

这里把数学的法则彻底地歌诀化了. 用三十一字读不完的东西，被编写为长歌.

首先，求正方形面积时(如图 5 的照片)，

平方，为正方形，方为其边，是以自乘，成为式(按：正方形面积公式). [91]



图 5 《因归之歌》中的开平方的歌诀.

已知正四棱台的上底的一边长(末方)、下底的一边长(本方)和高的情况下，求体积的歌诀为：

"倍末方，加之本方，
又乘本方，知步数.
倍本方，加末方，
又乘末方，知步数.
合本末步数，乘以高，

除以六，即知坪数.”

下面再看开平方的计算：

“今有十五步一分二厘九毛.此平方为三寸八分八厘.不尽

[92] 七厘四毛六系.此等之式为自归.

自归	开平	步数	实置
一十	位	商	自因之自数
置又	实之步数	内	自因之自数
引又	商之数	倍	法
残步	一位	次之商	次之商又
自因	隅之步数	心得	除之余
步内	引又	二位	倍商
为法	将残步数	一位	除三
为商	三之商又	自因	隅之步数
心得	除残	步数内	引
一二三	商之位	知为方”	

如歌诀开头所说，开 15.129 的平方，得了商 3.88 和余数(不尽之数)0.0746.这样，把图 5 的计算法则编成歌诀.这是在算盘上计算的结果.

再来看二三个例子吧.

“山形中，钩与股相乘
以二除之，即知步数
平圆中，径乘以径
以法乘之，即为步数
方锥，合方的乘积，乘以竖
除以三，即得坪数.”

第 1，是求三角形面积的歌诀，钩为高，股为底边.第 2，是求圆面积的公式，径是指直径，先求直径的平方，再用法 $\left(\frac{\pi}{4}=0.79\right)$乘它.第 3，求方锥的体积时，先求底的正方形的一

边的平方,再乘以竖(高),除以三.以歌诀形式说明数学法则,不只是因归算歌,当时的数学书中,为了易于记忆,很多数学法则几乎都采用歌诀形式. [93]

吉田光由的《尘劫记》中有:

“米米,除以市价,得银数.
银乘市价,得米数.
减二成,内有八,乘法算,
外有十二,知之除.
增二成,外为十二,乘为好
内有八,知之除.”

第一首歌讲述了米价和市价的关系.其余两首歌,揭示了内二成减、外二成减、内二成增和外二成增的计算法则.

乘应元年(1652年),田原嘉明写的《新刊算法起》有下面的歌诀:

“从古至今,于世间
古事接踵,算法出
早已合算法
何时被评论错与无能
造与古法相异之法
恐论为无调之法.”

第一首歌,表达了从古到今出现了很多算法的意思.最后一首歌的意思就是,在序文中所论述的那样,自己创造了新的计算方法,但是担心也许什么时候受到别人的批评.

2. 中国数学书中的歌诀

用歌诀说明数学法则,不只是在日本有.这是日本人从中国学到的东西.《尘劫记》和《因归算歌》都是根据中国的《算法统宗》编写的著作.

在中国从何时开始了这个习惯,我们并不清楚.唐、宋、元时

[94] 代出版了很多数学书，但大部分已经失传，现存的最早的古本是贾亨的《算法全能集》①. 虽然不能准确说明它的详细出版年代，但据说是在元、明两个朝代交替(1368 年)之际.



图 6 《算法全能集》目录.

如图 6 所示，这本书中有开平方的诗. 中国人把数学中的诗叫做“歌诀”，并把大多数数学法则都用歌诀来解释.

由于《算法全能集》中的歌诀古老而难懂，这里只以《算法统宗》为例说明吧.《算法统宗》是程大位于万历 20 年(1592 年)完成的著作，是中国最广泛流行的算学书，并传播到日本，为和算打下了基础.

首先，开平方的歌诀为：

---

① 《杨辉算书》等书中已有不少歌诀.

"平方带纵法为齐，下为先安纵步基.
上商得数加纵内，纵方下法并为题.
上下相呼除实毕，倍方不倍纵开余.
余数续商方再倍，何愁此术不能知."

仅这些是不能开平方的，而是学习一次后再把歌诀记忆下来才能够开平方的.



图 7 《算法全能集》① 中的开平方歌诀. [95]

《算法统宗》，不仅把法则编成歌诀，而且用歌诀形式提出了数学问题：

"有个学生心性巧，一部孟子三日了.
每日增添一倍多，问君每日读多少？"

虽然不能一下子理解它的意思，但我们知道《孟子》共有 34 685 个字. 第一天读 4 955 个字，第二天读它的 2 倍 9 910 个字，第三天读第二天的 2 倍 19 820 个字.

① 在古代中国的书籍中早已有.

这是一个级数问题，下面再举一个过不足算问题：

一百馒头一百僧，大和三个更无争.

小和三人分一个，大小和尚得几十？

有一百个馒头，把它分给一百位大小和尚. 为了不让和尚们争吵，分给每位大和尚 3 个馒头，给每三位小和尚一个馒头. 问大小和尚分别有多少人？

计算的结果，大和尚有 25 人，得 75 个馒头，小和尚有 75
[96] 人，得 25 个馒头.

因《算法统宗》以这种形式有趣地说明了算法的缘故，成了中国数学教育的具有代表性的教科书.

3. 印度数学书中的歌诀

歌诀，不仅中国和日本有，而且在古代西方各国也能见到. 这里只举印度①的例子. 印度数学的鼻祖巴斯卡拉（Bhaskara，出生于 1114 年）的著作中，押韵的东西非常多. 以他女儿的名字命名的著作《利拉瓦底》的第一问如下：

Dear intelligent Lilavati,

If there be skilled in addition and subtraction,

Tell me the sum of two, five, thirty-two,

A hundred and ninety-three, eighteen, ten,

And a hundred, added together,

And the remainder,

When their sum is subtracted from ten thousand.

问题的意思是，把 2，5，32，193，18，10，100 相加，然后由 10 000 减去其和.

………………………………………

如前所述和算的目的在于实用，而由中国和印度的数学书

① 印度是亚洲国家，不在西方.

可见，给人的感觉是他们的数学教养成分较多.

……………………………………

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

也有这个公式的一首歌：

From square of b take $4ac$;

Square root extract and b subtract;

Divide by $2a$, you have x alway.

第3节 嵌套问题的计算

比例分配问题在今天的日常生活中也是非常重要的. 比例分配问题占了古代数学书中大部分内容.

把土木工程的费用按大户的俸禄额比例分配的问题、根据部落远近按一定比例公正地分配建桥的费用问题、运输问题等都是属于比例分配问题. 其典型的例子就是嵌套计算问题.

1. 嵌套问题的计算

首先，看看《尘劫记》的原文(如图8)：

“嵌套算之事.

今用银子二十一匁[①]购七个人子(嵌套的七个锅)，每小一个少用银子六分，每一锅的价值几何？

答曰：一匁二分，一匁八分，二匁四分，三匁，三匁六分，四匁二分，四匁八分.”

这是嵌套锅的问题. 当时的日本还没有出现铜钱“宽永通宝”，仍然通用着金和银.

① 匁(もんめ)：古代日本货币，“一两”的六十分之一. 一匁等于十分.

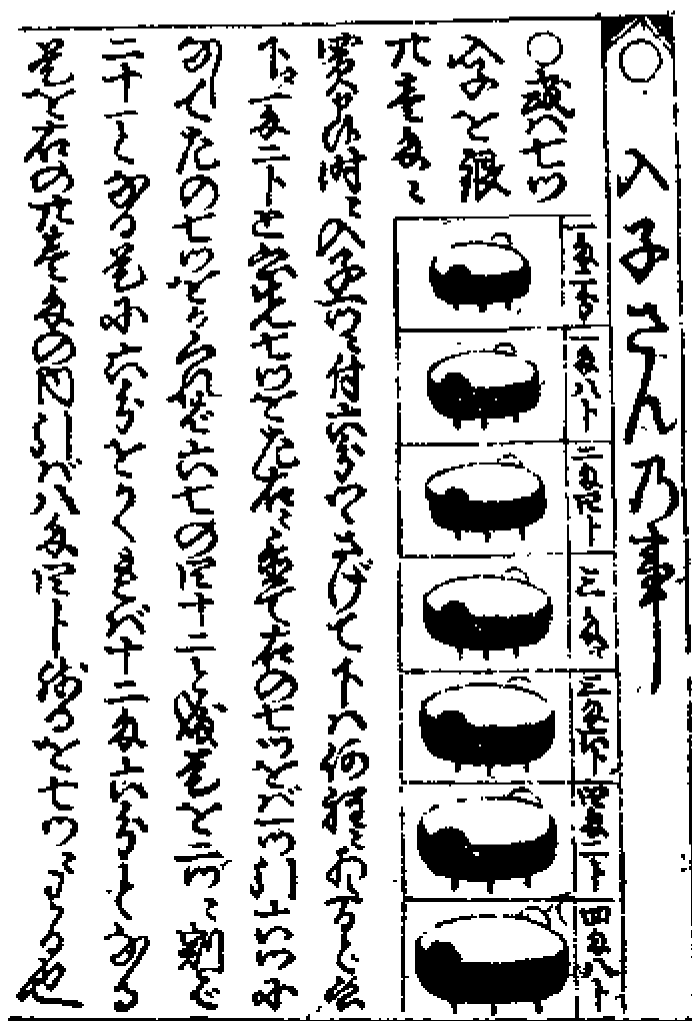


图 8 《尘劫记》中的"入子算"问题.

这个问题为,"花 21 匁银子购买了以七个为一组的嵌套的
[98] 锅,相邻两个锅之间的价值差别为 6 分时,每一个锅多少钱?"

《尘劫记》中作了如下回答:

"先左右置七个,由右面七个减一为六,乘以左面七个,六七为四十二.用二除之,得二十一.又以六分乘之,得十二匁六分.又由原二十一匁减之,余数为八匁四分,又以七个除也."

设最小的锅的价钱为 x,那么下式成立

$$x+(x+0.6)+(x+0.6\times2)+(x+0.6\times3)$$
$$+(x+0.6\times4)+(x+0.6\times5)+(x+0.6\times6)=21,$$

故 $7x+0.6\times(1+2+3+4+5+6)=21.$

因为 $1+2+3+4+5+6=\frac{1}{2}(6\times7)$，故原文中解释了求出 x 的方法.

对当时人来说，等差数列是一个相当困难的问题.后来这个问题更加困难了.



图 9 《尘劫记》中的建桥费用问题. [99]

“花十六匁一分购以嵌套之七个锅时，由第七至第六时多一分，由第六至第五时多二分，由第五至第四时多三分，由第四至第三时多四分，由第三至第二时多五分，由第二至第一时多六分，问最大者与最小者的价值各几何？

大者为三匁六分，小者为一匁五分.”

这个问题是：花 16.1 匁买了 7 个锅，七（小），六，五，四，三，二，一（大）.

价值为：

六一七=0.1，五一六=0.2，四一五=0.3，三一四=0.4，二一三=0.5，一一二=0.6.

此时，问每一锅的价钱多少. 这样问题更深入了.

2. 在长崎购物

这也是比例计算问题，难度更大一些.

“分配于长崎购物之三人本金之事.

一，人参二百五十斤. 一，沈香珍肴七十斤. 一，布匹二百八十卷. 一，线八千四百斤.

以上四种值银一百六十贯时，三人各出的银子数如下：

银六十四贯八百目①，京都之商人出也.

银五十二贯三百目，堺②之商人出也.

银四十二贯九百目，大阪之商人出也.

按各自出钱之多少分配以上四种物时，每人各分到多少？

[100] 答：京都商人之钱

银六十四贯八百目

人参一百零一斤十匁，沈香二十八斤十四匁，线二千四百零二斤，布匹一百三十卷一丈五尺二寸.

堺之商人之钱

银五十二贯三百目

人参八十一斤二十八匁，沈香二十斤卅五匁，线二千七百四十五斤一百二十目，布匹九十一卷一丈九尺九寸五分.

大阪之商人之钱

银四十二贯九百目

人参六十七斤一匁一分，沈香十八斤卅五匁三分，线二千二百五十二斤四十目，布匹七十五卷二尺八寸五分.”

---

① “目”是指秤、尺上的星.

② “堺”的读法为“さかい”，可翻译为疆域或界限.

在长崎，京都、堺、大阪的商人共同出钱购买了人参、沈香、布匹和线四种货物. 这是他们按各自出钱的比例分配货物的问题.

3. 父母遗留的银子

这个问题也在《尘劫记》中.

有一天，给七个孩子分配一千八百贯目银子，从大儿子到二儿子时减少五成，从二儿子到三儿子时减少一成，从三儿子到四女儿时减少五成，从三儿子到五儿子时减少一成，从五儿子到六儿子时减少一成，六儿子到最小儿子时减少一成，他们分别得银子几何？

答曰：

大儿子，五百五拾贯廿九匁八分；

二儿子，贰百四拾七贯五百一拾匁九分；

三儿子，贰百四拾七贯五百一拾三匁四分一厘；

四女儿，一百二拾三贯七百五拾六匁七分；

五儿子，贰百贰拾贰贯七百六拾贰匁六厘；

六儿子，贰百贯四百八拾五匁八分六厘； [101]

七儿子，一百八拾贯四百三拾七匁贰分七厘.

第4节 小偷偷和服

宽永 4 年(1627 年)初出版的《尘劫记》中没有“偷和服的小偷”问题，但在四年以后的宽永 8 年再版的五卷本《尘劫记》中第一次出现了这个问题，叙述如下：

知盗和服之人之事.

八八分，差七件，七七分，余八件. 闻此，立刻得知小偷人数与和服件数.

小偷，有十五人.

和服，有一百三十件.

法：八件八件和七件七件分配时，为十五.此数为小偷的人数也.

这个问题有“布盗算”、“和服小偷算”、“小偷算”等名称.

用八件和七件这个特别的数值恰好得出答案，这正引起了人们的兴趣，其后的《尘劫记》也直接采用原来数值的较多.在多数《尘劫记》中有小偷们在桥下面分配偷盗来的布匹，而有人从桥上面窥视的插图(图 10).

[102] 但是，从数学角度看这是一个非常简单的问题.设小偷数为



图 10 引自《尘劫记》.

x,布匹为 y,那么上述问题归结为二元一次方程组的问题:

$$y-8x=-7,$$
$$y-7x=8.$$

"法曰"中"八件八件和七件七件分配时,为十五.此数为小偷的人数也"就说明了从第二方程两边减去第一方程两边的过程.

对于问题的来源,我们可以追溯到两千年以前的古代.

这问题可能是在大约公元 100 年以前形成的.中国最古老的数学著作《九章算术》的第七章"盈不足"里就有."盈"是有剩余的意思,这里讨论了剩余或不足的问题.其第一问是:

"今有共买物,人出八盈三,人出七不足四,问人数物价各几何?"

设人数为 x,物价为 y,那么有

$$8x-y=3,$$
$$7x-y=-4.$$

由此得 $x=7$,$y=53$.

这个问题后来被转载到很多数学书中.万历 20 年(1592 年)的《算法统宗》中也有.这可能是该问题传到日本的原因.

日本人叫做"小偷算",虽然这个名字不是那么高雅,但是源头在于中国的《孙子算经》(唐朝以前的著作)中: [103]

"今有人盗库绢.不知所失几何.但闻草中分绢.人得六匹,盈六匹.人得七匹不足七匹.问人绢各几何?答曰:贼一十三人,绢八十四匹."

《算法统宗》也有类似的故事.

第5节 小偷的隐藏

在柳亭种彦的《柳亭记》中有如下记载:

"吾幼时,有老人列棋子,不是奇怪之事,而如今未见游戏之孩童.

首先，将十六个棋子如图 11(1)排列，唐和日本的国界，于筑罗之冲里，有检查来往船只之检查所. 以每七人为一边，构成正方形(每边为七人)，叫做七人检查所. 向该所来了小偷八人，欲来到日本，并请求隐藏在这里. 从检查所外看，每边有七人，这人数是确定的. 在检查人员中有一位聪敏的人，未减七人的人数，首先隐藏一人，如图 11(2). 如此，从角上抽调一人到中间，在各角上留一人，其余都移到中间(八个人也能够隐藏)，最后变成了如图 11(3).

从角向两个方向数. 减少角上的数往一个方向数. 增加中间的棋子数，四边的数字都是七个，没有变化. 这个技巧便成了小孩的游戏."

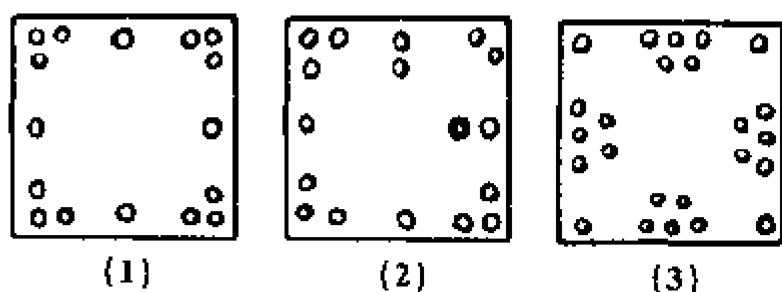

(1)　(2)　(3)

图 11

我想读者已经理解了隐藏小偷的意思和方法. 下面再举日本和算著作中的一道题. 在和算著作一明历 3 年(1657 年)藤冈茂之写的《算元记》中有下面的题.

[104]

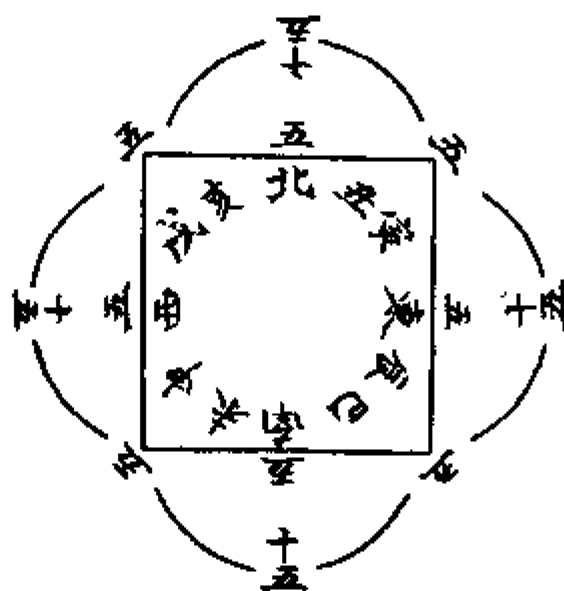


图 12

"正方形图，如图 12，从四面看时，算角在内就各边都是十五，四个四个加到十六个后，也是各边上的和为十五. 然后减到二十四个其各边的和也是十五.

上述方法是，当先拿四个时，从丑寅角各取一个放置东边，再从手中取一个也放在东

边，依次进行各个边角上的操作.

另外，减法是，从中间取两个，角上放一个，把剩下一个减掉，依次进行各边角的操作.”

虽然没有必要说明“隐藏小偷”的数学意义，但这里需要附加以下西方的例子.“隐藏小偷”的名称是从日本的室町时代流传下来的，在中国的文献中尚没有见到，而西方的文献有这类问题.

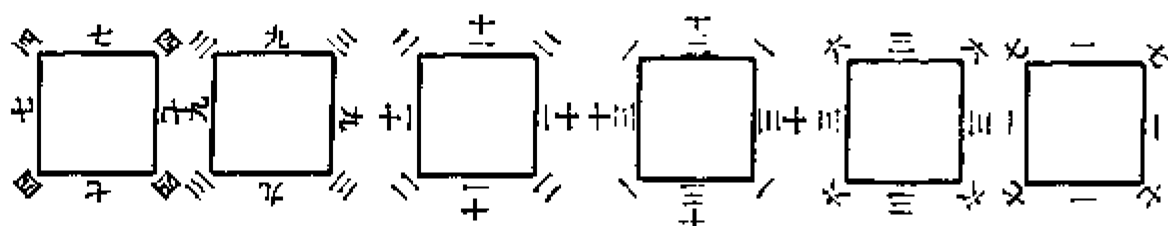


图 13

这类问题最早是在西方巴舍的著作(1612 年)中出现的. 故事如下：

“一个农场主的仓库是由四面三个区组成的，仓库里如图 14(1)存放了 24 瓶葡萄酒，每一个区里放 3 瓶，每一边上 9 瓶. 可是，管理人员从中悄悄偷了 4 瓶，并把剩余的酒放置如图 14(2). 主人来查看时，四边形仓库的每一边上仍然有 9 瓶葡萄酒，便放心地走了.”

如果如图 14(3)操作应该有 28 瓶葡萄酒，如图 14(4)操作应有 32 瓶葡萄酒，相反地，要增加才行. [105]

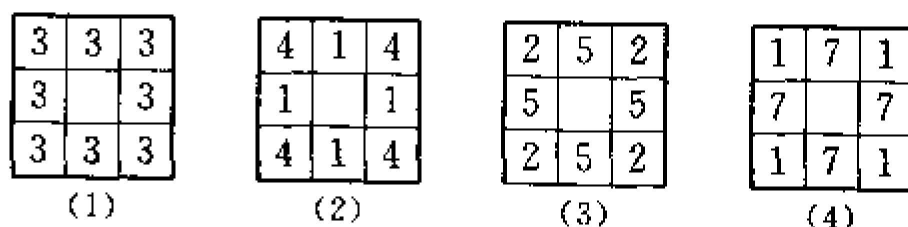


图 14

这是法国数学书中的问题，在英国的读物中也有类似的故事：伦敦郊外有一个农民，农园的周围建了 8 个仓库，以四边相

同数字储藏葡萄酒.

在美国的通俗读物中，例如怀特(White)的"A scrap book of elementary mathematics"《初等数学片断》(1910 年)中有一个变形故事：

叫罗扎木的地方，有一个宿舍如图 14(1)，周围有 8 个房间，中央有游戏室. 管理员在每一房间安排了 3 人，共管理 24 人.

有一天，4 名学生出来玩游戏后，留下来的学生经过商量后如图 14(2)进人房间. 因此，安全地通过了"聪明的管理员"的检查.

第二天，从外面进来了 4 名学生，如图 14(3)进人了宿舍，这样也安全地通过了"聪明的管理员"的检查.

也有把"聪明的管理员"改编为《罗扎木的聪明人》的书. 另外，不是《聪明的宿舍管理员》，而是把它改变为在中央室里"盲人"被管理的故事.

无论是在日本，还是在西方，这类游戏并不是鲜为人知的事.

第6节 鸳鸯游戏

1. 日本的文献

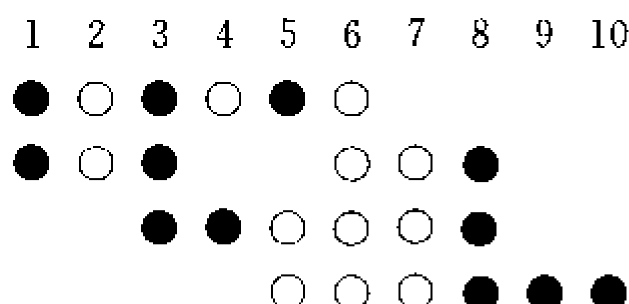
在宽保 3 年(1743 年)出版发行的中根法舳的《勘者御伽双
[106] 纸》中，在"鸳鸯游戏"题目的下面记载着以下内容.

黑白棋子各有三个，如图所示，按黑白相隔放置●(一)○(二)●(三)○(四)●(五)○(六)，问如何移动一处的每两个棋子的位置使它变为如○○○●●●之形式？

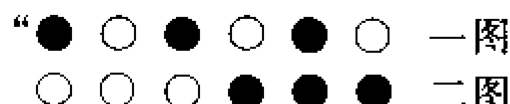
法曰：使四五移至六七，一二移至四五、三四移至九十，则成为

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
				○	○	○	●	●	●

图解这个过程如下：



因为把黑白棋子来回移动操作，就如鸳鸯朝夕相处，悠然自得地在水面上游泳那样的缘故，所以，就产生了“鸳鸯游戏”的名称. 这是第一次出现在文献中，后来问题被更新了. 明治 12 年(1879 年)，福田理轩的著作《算法玉手箱》中有如下游戏.

“

如一图以 2 个位一组放置，如何使其变成如二图形式？

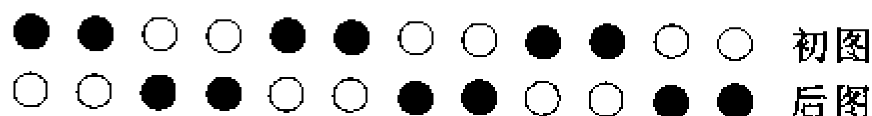
法曰：



将取 D,E 移到 G,H 的位置、将 A,B 移到 D,E 的后面，将 C,D 移到 J,K 的位置后即可得如二图形式.”

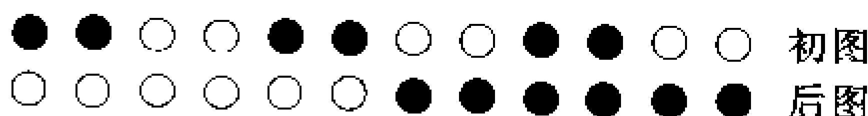
《算法玉手箱》中又给出了这个游戏的两个扩大形式.

第一



如初图取三个，三次替换位置后，如何变成如后图的形式？ [107]

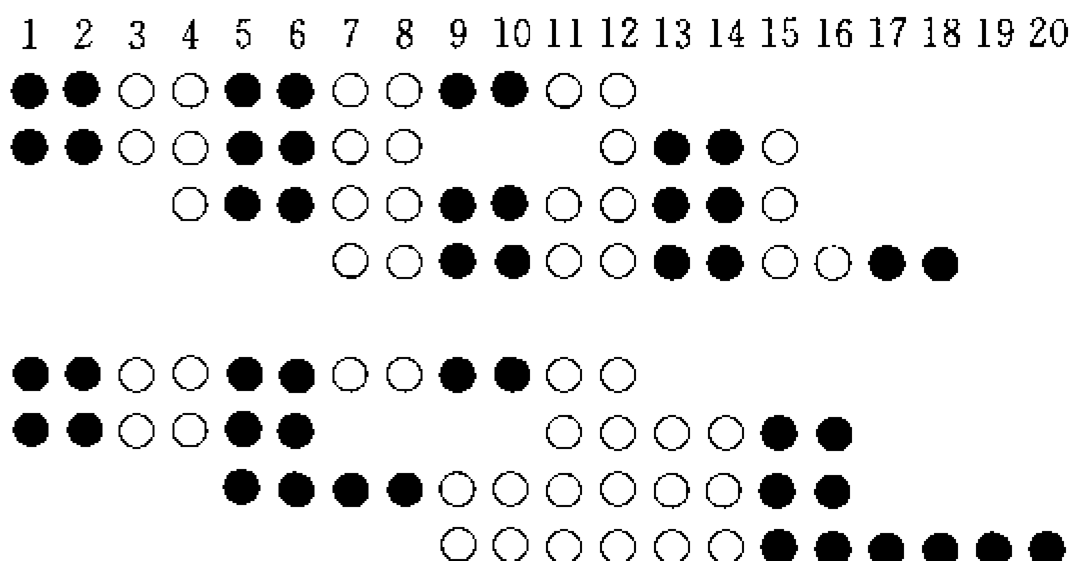
第二



如初图，取四个，三次替换位置后，如何变成如后图形式？用下面的方法可以得出这个问题的解.

---

① 原文是用日文假名编号，此处改为人们熟悉的英文字母.



林鹤一(1873—1935)在明治 32 年(1899 年)和大正 14 年(1925 年),得到这个问题的一般解.(请见:《林鹤一博士和算研究集录》,昭和 12 年(1937 年)刊,下卷第 735 页~747 页.)

2. 泰特问题

据阿廉斯(Ahrens)的记载,在西方把这个问题叫做泰特(Tait)问题.因为英国著名物理学家泰特于 1884 年在《Philosophical Magazine》(哲学杂志)(vol. 5)中第一次发表了这个问题.阿廉斯(Ahrens)的说明中也写了这个游戏的来源,但它晚于在日本发表的 1743 年或 1879 年.也许到日本明治时期后,由于日本和西方的频繁的交通来往,这个游戏自然地从日本传到
[108] 了西方.至今在中国文献中也没有发现类似游戏.

泰特问题的原形就是把 4 枚金币(设为 B)和 4 枚银币(设为 A)进行如下排列:

	·	·	A	B	A	B	A	B	A	B
(1)	B	A	A	B	A	B	A	·	·	B
(2)	B	A	A	B	·	·	A	A	B	B
(3)	B	·	·	B	A	A	A	A	B	B
(4)	B	B	B	B	A	A	A	A		

泰特又给出了这个问题的第二个解，与这个解答方法的排列顺序相反.

	·	·	A	B	A	B	A	B	A	B
(1)	A	B	A	B	A	B	A	·	·	B
(2)	A	B	A	·	·	B	A	A	B	B
(3)	A	·	·	A	B	B	A	A	B	B
(4)	A	A	A	A	B	B	·	·	B	B
(5)	A	A	A	A	B	B	B	B		

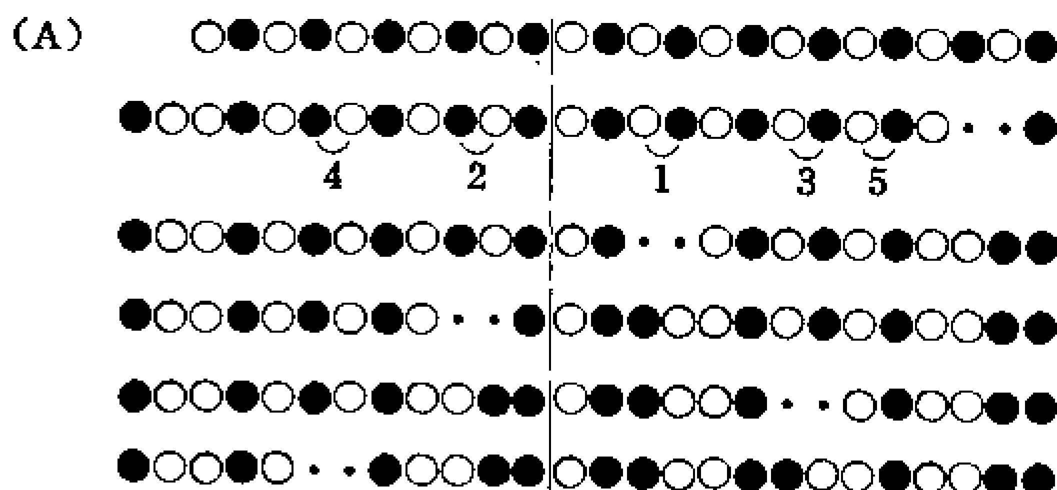
对这个问题，法国人德兰诺伊(H. Delannoy)给出的一般性解在 La Nature《自然》杂志第 15 卷(1887 年)上发表. 这个解的发表比林鹤一的解要早 12 年. 首先介绍这个解.

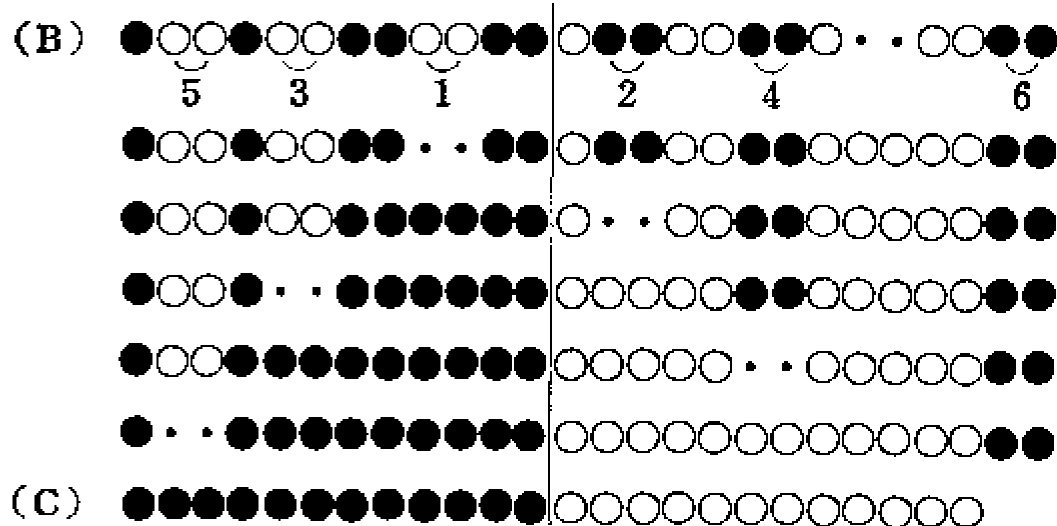
(Ⅰ) 偶数个的情形

说明当 $n=12$ 时偶数个的情形.

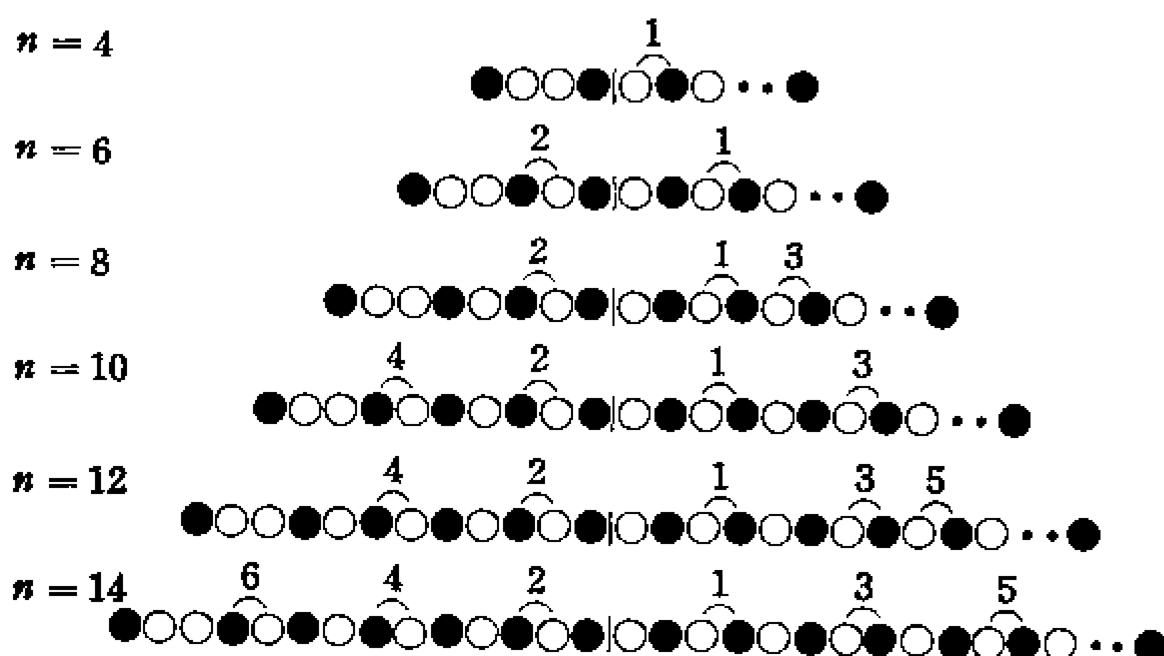
从(A)右端开始，把第 2,3 向左移动. 如下图所示那样左右分开，作奇、偶顺序号 1,3,5,2,4. 若按照这个顺序移动 2→1, 3→2, 4→3, 5→4，那么，就成为(B).

这里，与前面相反地作如图所示那样序号，并移动后完成(C). [109]



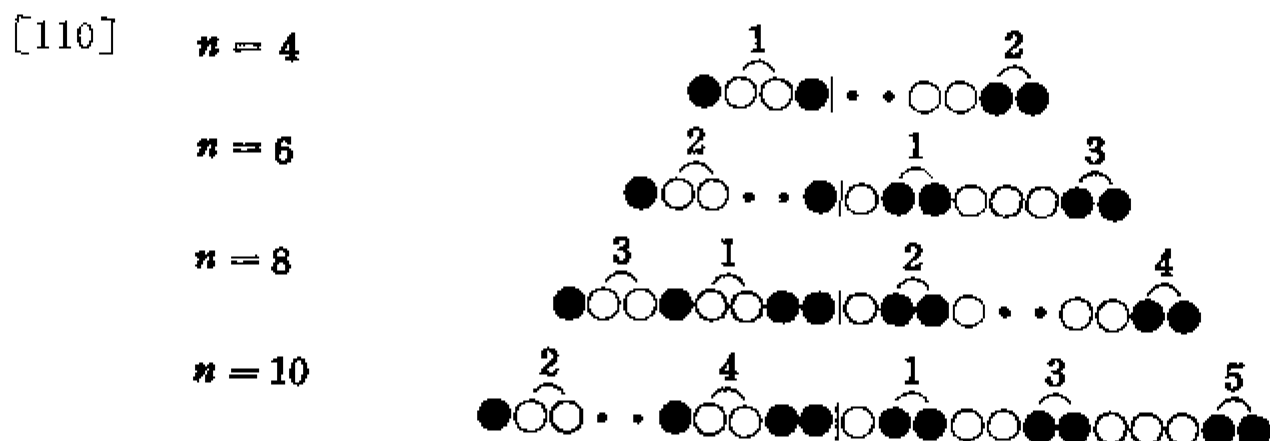


作(A)的序号有如下规则：



作(B)的序号有如下规则：

[110]

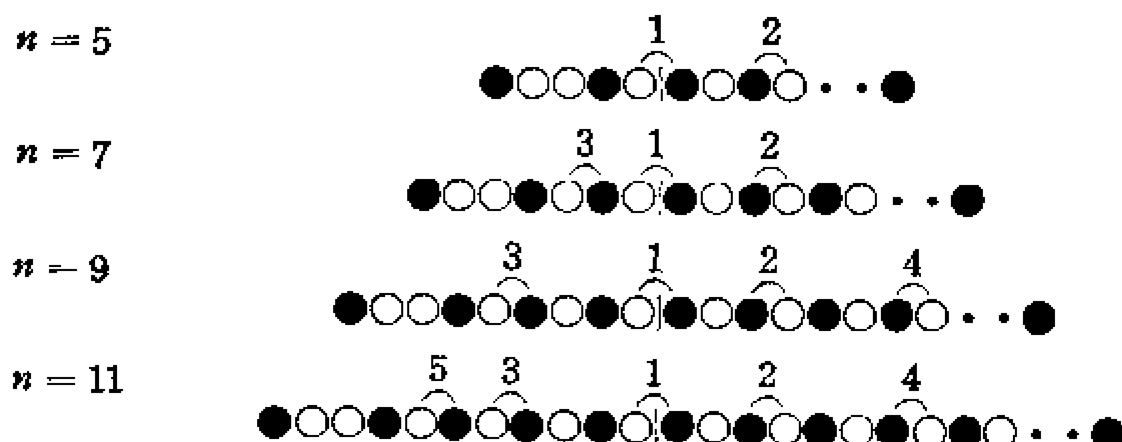


以上完成了偶数个的情形.

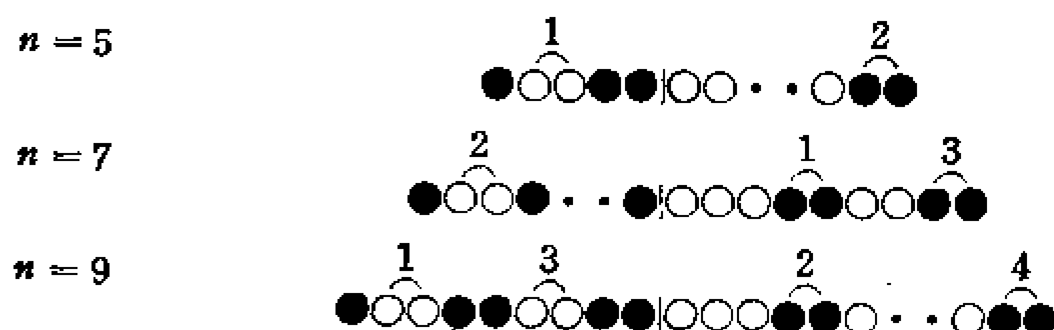
(ii) 奇数个的情形

奇数个的情形与前面相同,只改变一下作序号的方法就可以了.

作(A)序号的方法:



作(B)序号的方法:



现在已经完全解决了泰特的第一问题.德兰诺伊(H. Delannoy)用同样的方法论述了泰特的第二问题的解决法,这里不再介绍了.

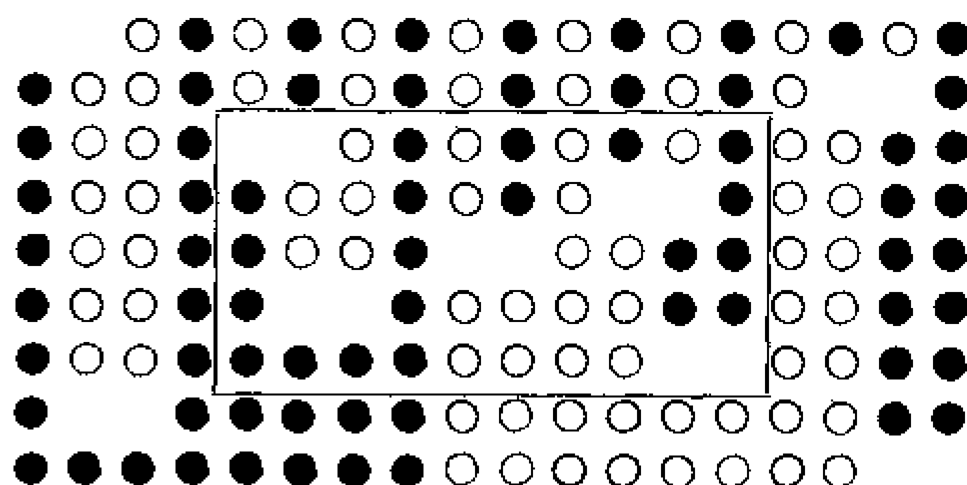
在前面提到的论文中,林鹤一把黑白两种棋子扩大为三种,在排列(AABBCC)以两个两个移动后能够改变成(ABCABC),但他没有能够解决把(AAABBBCCC)改变成(ABCAABCABC)的问题. [111]

3. 林鹤一的解

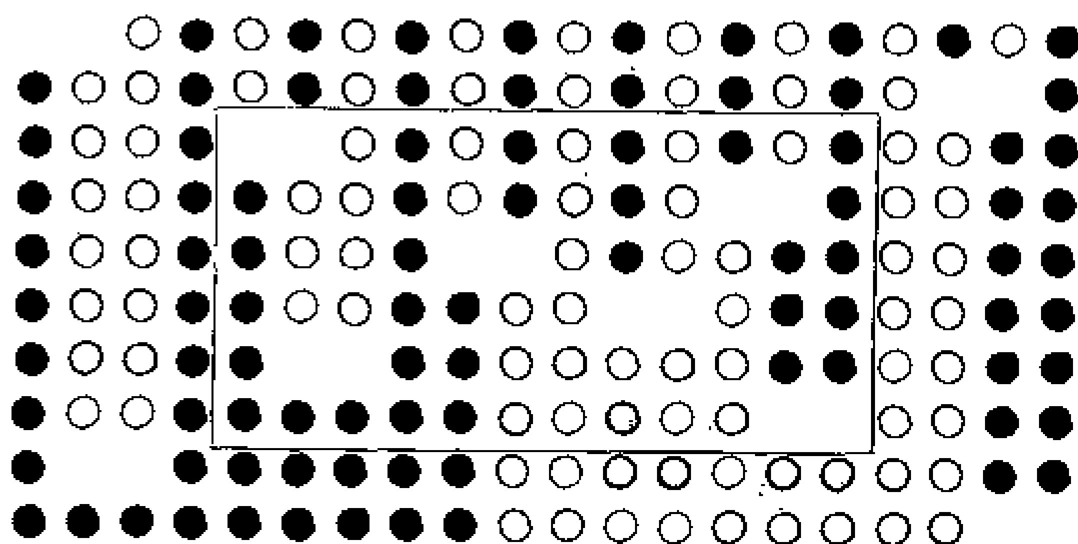
林鹤一作了当 $n=8,9,10,11$ 的情形的解答方法. 但是,由图框可知,框内当 $n=4,5,6,7$ 时成立的事实. 框外也是被相同的法则支配. 因此,由 $n=8,9,10,11$ 可以作出当 $n=12,13,14,15$ 的情形.

这样,就得到了一般的解,但林鹤一分别给出了各种情况下的解.

$n=8$

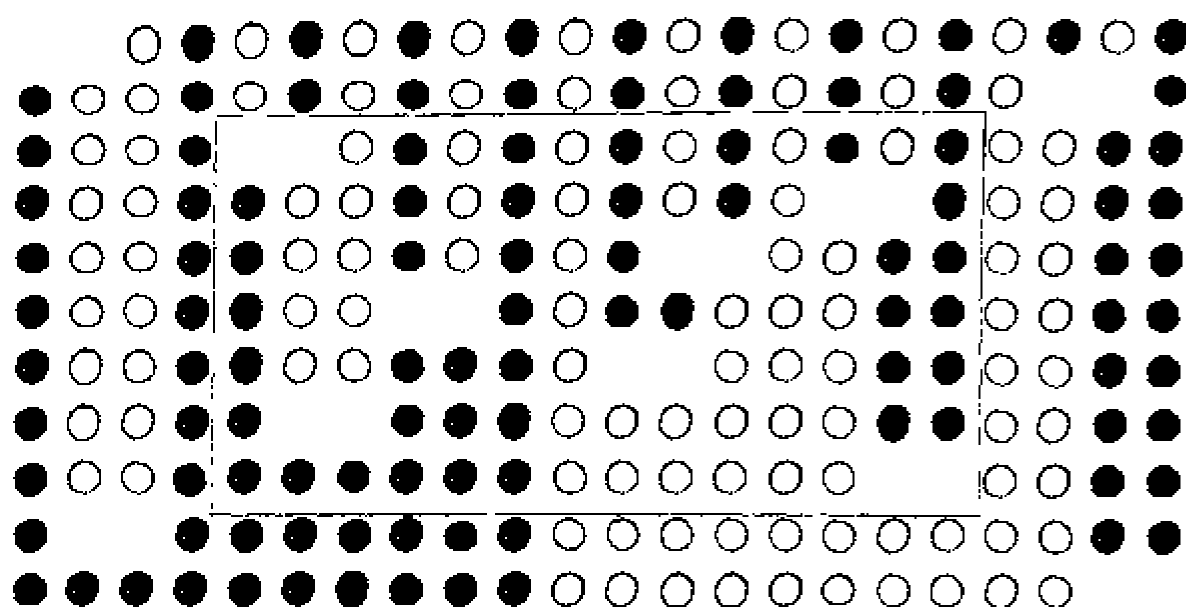


$n=9$

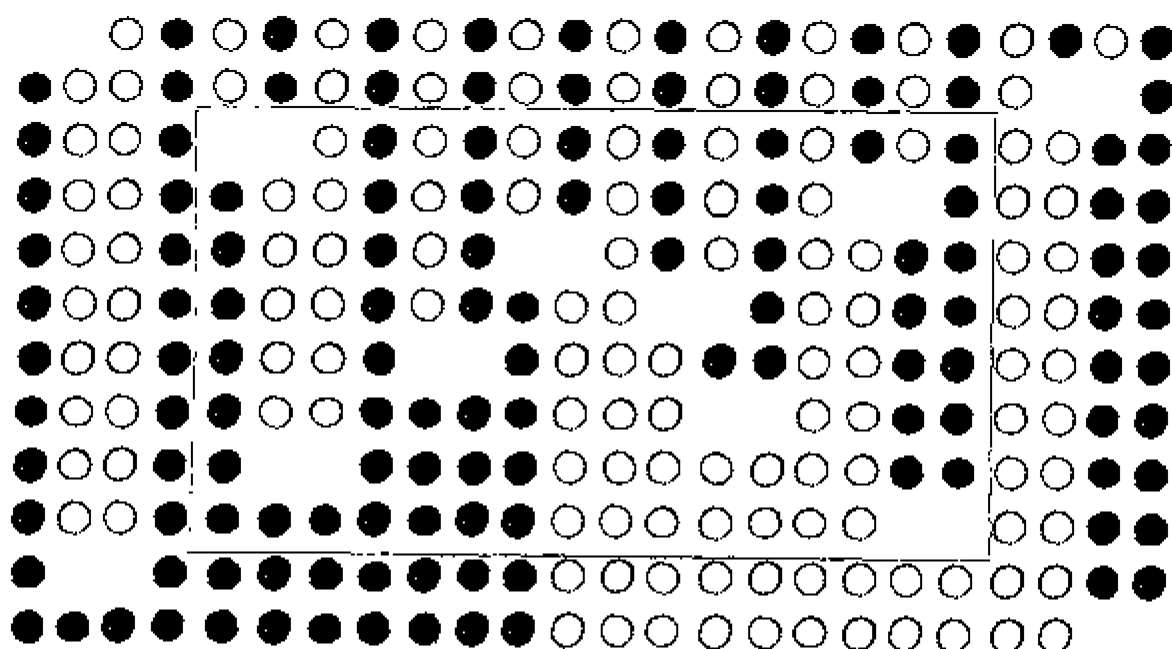


[112]

$n=10$



$n=11$



[113]

第7节 印度问题

欧洲所谓“印度问题”，就是“好问题”，是指富于机智的问题. 欧洲数学是从印度通过阿拉伯世界传播过去的东西. 中世纪的阿拉伯人对印度科学的尊重远远超过尊重古埃及. 印度出现了阿里阿巴塔(约生于 476 年)、布拉玛古夫塔(598—660?)、巴

斯卡拉(生于114年)等著名数学家,然而印度数学历史中存在很多不清楚的问题.下面我们从这些数学著作以及传到欧洲的
[114] 文献中收集一些“印度问题”看一看.

1. 芒果问题

3人饲养1只猴子.3人共同买了若干芒果.然后3人分别去养猴子的地方,并用芒果喂养了猴子.

第一人给猴子一颗芒果,自己要了所剩下部分的$\frac{1}{3}$,存放了其余的$\frac{2}{3}$;

第二人从剩下的芒果中给猴子一个,自己要了剩下部分的$\frac{1}{3}$,存放了其余的$\frac{2}{3}$;

第三人也从剩下的芒果中取出一个给了猴子,自己要了剩下部分的$\frac{1}{3}$,存放其余$\frac{2}{3}$.

这样,第二天3人一起到了养猴子的地方时,从剩下的芒果取出一个给猴子以后,3人正好3等分了剩下的芒果.

问最初的芒果究竟有多少个?

答:79个.

$(79-1)\div 3=26$ 剩52

$(52-1)\div 3=17$ 剩34

$(34-1)\div 3=11$ 剩22

$(22-1)\div 3=7$.

2. 旅行者和马铃薯

3个旅行者到达了一家旅馆.3人预定了若干个马铃薯.没过多久,主人拿来了马铃薯,但旅行者因劳累而睡觉了.

其中,1人醒来了.吃了全部马铃薯的$\frac{1}{3}$后又睡觉了.

接着，第二人也醒来，吃掉了马铃薯的$\frac{1}{3}$①后，又睡觉了.

最后，第三人也醒来，吃掉了马铃薯的$\frac{1}{3}$后，又睡觉了. [115]

然后，3 人同时起床时，盘子里只剩下了 8 个马铃薯. 问：主人最初拿来了多少马铃薯？

答：27 个.

3. 马铃薯和小偷

小偷进入农庄偷了若干个马铃薯. 农庄里有 3 个看守的人.

最初被发觉时，小偷想巧妙地隐藏起来，可是被要回去比所偷的马铃薯的一半多 2 个马铃薯.

其后被发觉时，同样返回了比一半多 2 个.

最后被发觉时，也返回了比一半多 2 个.

可是，当小偷从农庄逃出来一看，只剩下了一个马铃薯. 问：最初偷了多少个马铃薯？

答：36 个.

4. 驴和葡萄酒

母驴和公驴驮着若干瓶葡萄酒行进. 母驴说，它身上驮的太多. 此时，公驴安慰说：

“为什么说不公平呢？如果从你身上向我身上放 1 瓶，我驮的就成为你的 2 倍. 如果从我身上拿一瓶放你身上，那么，我们俩驮的不是相等了吗？”

母驴驮 5 瓶，公驴驮 7 瓶.

在古希腊文献中有欧几里得作了与此相同问题的记载. 问题中用的不是葡萄酒，而是装满小麦的袋子.

---

① 即全部马铃薯的$\frac{2}{3}$的$\frac{1}{3}$. 最后的也这样.

从 8 世纪到 10 世纪之间，古代印度的学术和古希腊的学术在阿拉伯的土地上融合了. 我们现在不大清楚这类问题的来源.
[116] 究竟是从哪里来的呢？由于阿拉伯人尊重印度的缘故，他们认为“好问题”可能是从印度舶来的. 后面将论述的三个问题也属于同一类型.

5. 羊的分配

1 个商人有 17 只羊. 他临终前给 3 个儿子留了遗言说：“老大要$\frac{1}{2}$，老二要$\frac{1}{3}$，老三要$\frac{1}{9}$.”

由于不能把 17 只羊按照遗言的要求分配，所以，只好请别人帮忙了. 结果聪明的邻居来了之后借给他们 1 只羊，便实现了如下的分配：

$$(17+1)\times\frac{1}{2}=9(\text{只})\quad \text{老大}$$

$$(17+1)\times\frac{1}{3}=6(\text{只})\quad \text{老二}$$

$$(17+1)\times\frac{1}{9}=2(\text{只})\quad \text{老三}$$

$$\overline{\quad 17(\text{只})}$$

分配结束后，邻居牵走了自己的 1 只羊. 这个问题有各种各样的变形形式.

6. 钻石的分配

古代，印度的一位国王给王子分配钻石时，下了如下命令（请见图示）：

首先，第一个人，要拿 1 个和其余部分的$\frac{1}{7}$；

第二个人，要拿 2 个和其余部分的$\frac{1}{7}$；

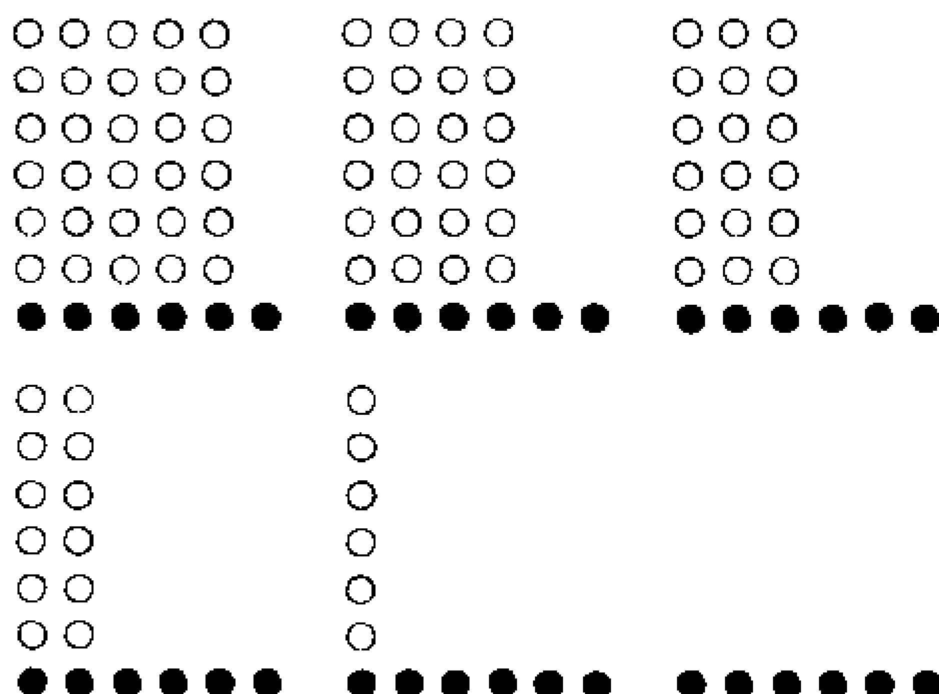
第三个人,要拿3个和其余部分的$\frac{1}{7}$.

以下用同样的方式进行吧!

王子们遵照命令领受了钻石,可是比较后发现每一个人都得到了相等的钻石.

问:钻石有多少、王子有几人?

答:钻石有36块,王子有6人.



与这些问题具有相同趋向的问题是从古希腊传进来的.

其一,"国王用金、铜、锡、铁欲制作一顶600克的王冠.可是定做的形式非常繁琐,国王说,金和铜要占全部的$\frac{2}{3}$,金和锡要占全部的$\frac{3}{4}$,金和铁要占全部的$\frac{3}{5}$.这是为什么?"

据说这个问题是在约公元1世纪的古希腊学者尼克玛卡斯①的著作中有.

① 尼克玛卡斯(Nicomachus)是希腊数学家、天文学家,曾有很多著作,大都失传.

下面的“顿智问题”，据说也是从尼克玛卡斯时代流传到现在，一般叫做“罗马问题”.

其二.“有一个人留下遗言，说：‘如果生了男孩，那么，把我的财产的$\frac{2}{3}$给儿子，$\frac{1}{3}$给妻子. 如果生了女孩，那么，把我的财产的$\frac{1}{3}$给女儿，把$\frac{2}{3}$给妻子’可是他妻子生了双胞胎，一男一女. 那么，究竟如何分配遗产？”

其三.“第欧汗塔斯的一生，孩提时代占了一生的$\frac{1}{6}$，青年时代占了$\frac{1}{12}$，结婚以前的时间占了$\frac{1}{7}$，结婚以后过 5 年才生了小
[118] 孩. 而儿子先死了，他的年龄是其父亲年龄的$\frac{1}{2}$.”

据说，这是在古希腊末期的数学家丢番图斯(Diophantus)的墓碑上留下的问题①.

7. 农夫和鸡蛋

有一个农夫去街上卖了鸡蛋.

第一人买了比全部的一半多一个鸡蛋.

第二人买了所剩下部分的一半多一个鸡蛋.

第三人买了所剩下部分的一半多一个鸡蛋.

最后还剩下了 10 个鸡蛋.

问，最先带去的鸡蛋有多少？

答：94 个

---

① 卡约利的《数学史》中 eqitaph 有“墓碑铭文”以外，还有“写在墓碑上的已故者的面貌作风的短文”的意思. 在 D・E・史密斯的《数学史》中写的是 anthology，有诗文等撰集的意思. 从这个意义说，这不是墓碑上的铭文.(大矢真一)

8. 筐子里的苹果

筐子里有若干个苹果. 首先从中取出比一半多一个,其次又取出比所剩下部分的一半多一个,最后又取出比所剩部分一半多一个.

最后剩下 3 个苹果.

问:最先筐子里有多少苹果?

答:38 个

9. 毕达哥拉斯定理

毕达哥拉斯定理,就是"直角三角形的两个直角边的平方之和等于斜边的平方". 这是古代埃及、印度和中国等国各自独立发现的定理. 在印度数学书中有丰富的应用例子.

(i) 从河岸的距离为 b 的地方,一棵芦苇露出水面的高度为 a. 把芦苇拉到岸边,其头正好与水面对齐了. 问芦苇的长度是多少?

(ii) 竹子在离地面 a 高度的点上被折断了,被折断部分的梢落在从根部到 b 的点上. 问竹子的长度是多少? [119]

(iii) 悬崖上的 A 点处有两只猴子. 其中的 1 只从悬崖上下来到了 B 点,然后又跑到了 P 点. 另一只猴子爬树爬到了 C 点(顶点),然后从 C 点直接跳跃到了 P 点. 这样,2 只猴子经过了相同的路程. 问树的高度是多少?

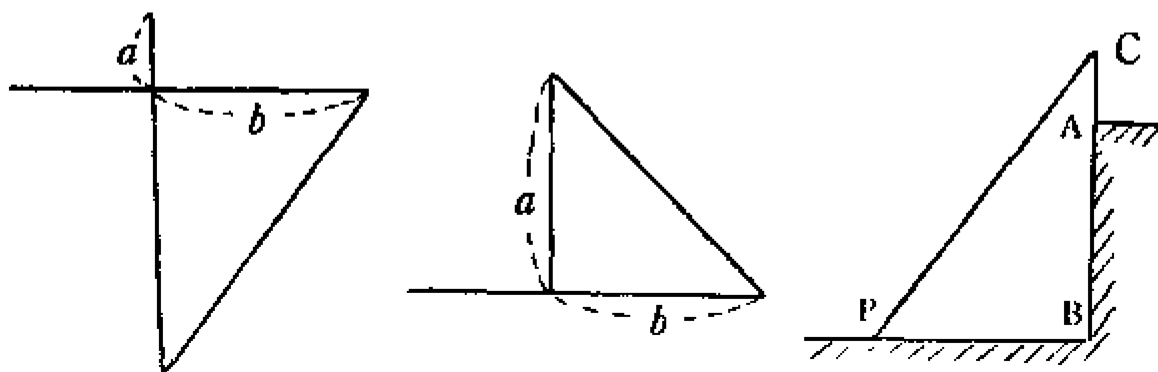


图 15

随着佛教的传入，古代印度和中国的交通往来蓬勃发展，同时印度数学也传到了中国. 在中国唐代的有些天文学著作中论述了印度阿拉伯数字使用起来非常方便，但是它的具体形式没有流传下来.

在中国的《算法统宗》(1592 年)中，以与上述毕达哥拉斯定理(i)(ii)类似的形式论述了毕达哥拉斯定理，可是还找不到从印度传进来的证据.

日本江户时代初期，《算法统宗》传入日本后成为了和算产生的原动力，延宝 3 年(1675 年)出版了校点的复刻版本(如图 16).



[120]

图 16 《算法统宗》一页.

第8节 填 数 字[①]

1. 方阵卡

由于日本的填数字游戏过于复杂,这里简单地介绍具有相同原理的西方方阵卡.

1	9	17	25	33	41	49	57
3	11	19	27	35	43	51	59
5	13	21	29	37	45	53	61
7	15	23	31	39	47	55	63

Ⅰ

2	10	18	26	34	42	50	58
3	11	19	27	35	43	51	59
6	14	22	30	38	46	54	62
7	15	23	31	39	47	55	63

Ⅱ

4	12	20	28	36	44	52	60
5	13	21	29	37	45	53	61
6	14	22	30	38	46	54	62
7	15	23	31	39	47	55	63

Ⅲ

8	12	24	28	40	44	56	60
9	13	25	29	41	45	57	61
10	14	26	30	42	46	58	62
11	15	27	31	43	47	59	63

Ⅳ

16	20	24	28	48	52	56	60
17	21	25	29	49	53	57	61
18	22	26	30	50	54	58	62
19	23	27	31	51	55	59	63

Ⅴ

32	36	40	44	48	52	56	60
33	37	41	45	49	53	57	61
34	38	42	46	50	54	58	62
35	39	43	47	51	55	59	63

Ⅵ

① 本节第4、5、6、7个游戏是根据日本民族的语言习惯和发音等编写的,翻译后完全失去它的趣味性,因此这里删除了.没有全部翻译第11节的“算额”的产生发展的考证部分.

在西方，圣诞节的晚上，有一种叫做"散塔·克如斯带着土
[121] 特产来"的方阵卡，一般在 6 张卡上印了从 1 到 63 的数字.

A 把 6 张卡递给 B，

A 问："你的年龄在哪些卡上？"于是 B 片刻看了看卡.

B 回答说："在 I、II、IV、V 卡上都有."

于是 A 立即说出："那么，你的年龄是 27 岁."猜对了 B 的年龄.

这里 A 并没有进行复杂的计算. 只注意到了卡上最初的 I(1)、II(2)、III(4)、IV(8)、V(16)、VI(32)，并听到在 I、II、IV、V 上都有以后，把它们上面的第一个数字相加了.

即

$$1+2+8+16=27.$$

那么，方阵卡究竟有什么结构呢？用二进制来说明这个问题.

2. 二进制

这个方阵卡是根据二进制原理来构造的. 所谓二进制是只用两个数字造的数. 现在用 0 和 1 的二进制表示从 1 到 63 的数，就成为如下所示那样.

如果二进制数的第一位上有 1，那么卡 I 上写原来的数. 如果二位上有 1，那么卡 II 上写上原来的数，三位、四位、五位、六位上有 1 的话，III、IV、V、VI 上要写原来那个数. 这就是 6 张方阵卡.

故，关于 27＝11 011，一位、二位、四位、五位上都有 1，因此，在卡 I、II、IV、V 上写着 27 这个数.

因为 27，

$$27=11\,011=10\,000+1\,000+10+1,$$

所以观察二进制表后有

[122]
$$27=16+8+2+1=2^4+2^3+2^1+2^0.$$

$2^0=1=$ 1	22= 10 110	43=101 011
$2^1=2=$ 10	23= 10 111	44=101 100
3= 11	24= 11 000	45=101 101
$2^2=4=$ 100	25= 11 001	46=101 110
5= 101	26= 11 010	47=101 111
6= 110	27= 11 011	48=110 000
7= 111	28= 11 100	49=110 001
$2^3=8=$ 1 000	29= 11 101	50=110 010
9= 1 001	30= 11 110	51=110 011
10= 1 010	31= 11 111	52=110 100
11= 1 011	$2^5=32=$100 000	53=110 101
12= 1 100	33=100 001	54=110 110
13= 1 101	34=100 010	55=110 111
14= 1 110	35=100 011	56=111 000
15= 1 111	36=100 100	57=111 001
$2^4=16=$10 000	37=100 101	58=111 010
17=10 001	38=100 110	59=111 011
18=10 010	39=100 111	60=111 100
19=10 011	40=101 000	61=111 101
20=10 100	41=101 001	62=111 110
21=10 101	42=101 010	63=111 111

因此,相加卡的第一个数就可以了.

因为在二进制中只有 0 和 1 两个数字,加法运算只有 $0+0=0$,$0+1=1$,$1+1=10$.例如,相加 $7=111$,$15=1\ 111$ 两个数,就有如下形式

$$\begin{array}{r} 111 \\ +)\ 1111 \\ \hline 10110 \end{array}$$

此外,只利用下面的 10 个数,从 1 到 1 000 的数,作为其和的表示被利用在数学游戏中,这也是以二进制原理为基础的.

1,2,4,8,16,32,64,128,256,489. [123]

最近的计算机的计算原理也是二进制.

俄罗斯农民的乘法运算也是二进制运算. 例如,计算 37×42 时,用 2 除 37,若出现余数就舍弃. 用 42 乘以 2 代替它. 如下面,继续用这种方法,一直进行到左列为 1 为止. 当左列为奇数时,取出右列的数,并相加,这相当于 37×42 的结果. 用二进制

$$37=2^5+0\times2^4+0\times2^3+2^2+0\times2+1$$

因此,右列就是计算$(2^5+2^2+1)\times42$.

37	42…	42
18	84	
9	168…	168
4	336	
2	672	
1	1344…	1344
		1554

3. 八卦原理

最近二进制已经是计算中的王者了,然而这是 2 000 年以前古代中国人早已发明了的东西. 即使是在今天的中国人和日本人中间也有一些不了解的人,因此,作为有趣的对照,这里需要简单地说明.

"中①也是八卦,不中也是八卦",这就是八卦. 八卦原理是根据以下 8 种组合为基础,制作 8×8=64 种爻的过程.

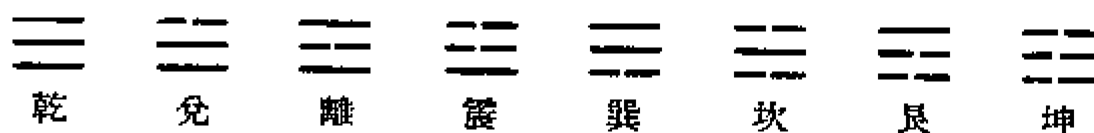


图 17

这 8 种组合,例如,如果用下面方法表示:阳——为 1,阴-- 为 0,那么,八卦就成为

111　011　101　001　110　010　100　000

[124] 这与二进制的由 0 到 7 的数一致,因此,表示了所有的组合.

① "中"在这里读 zhōng,正对上的意思.

占卜者从50根筮竹中取一根放在别处，两手拿着其余49根，进入无念的心境，然后，把筮竹分成两个部分. 因为49是奇数，所以，必定出现奇数和偶数. 这样进行6次. 根据奇偶的规则，将算筹（正反面有记号——和——的小棍儿）如图18摆列. 这就是 8×8＝64 的组合. 例如，出现"坎下乾上"或者"坎下震上"后，就打开看"易"的种本. "坎下乾上"中写着如"天水违之象"或根除疾病等方面的各种各样的名言名句. 因此，给前来看相人根据情况进行好的方面的说明.

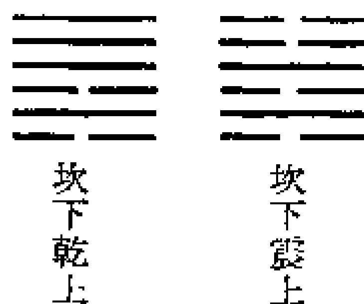


图 18

中国古代的"易"的二进制原理，是由德国哲学家、数学家莱布尼兹指出来的有名的佳话①. 古代中国曾经有过叫做"九连环"的一种游戏. 最近在百货商店里卖起了 puzzle ring 之名的一种玩具，就像西方玩具那样被销售，实际上这就是中国的"九连环"（最近的玩具并不是九连环，而是被代替为五连环或四连环）. 英国的瓦里斯（Wallis，1616—1703）和意大利的卡尔旦（Cardan，1501—1576）论述了能够用二进制法说明完全解开"九连环"的次数. [125]

第9节 遗题继承

日本江户时代的数学中出现了西方数学所没有的"遗题继承"和"算额"的习惯. 所谓"遗题继承"，就是数学家甲出版数学著作时在书尾提出数学问题不给出答案. 于是数学家乙解答这些问题出版数学著作，又提出若干新的问题，也不给出答案. 由

① 需要指出的是莱布尼兹发明了二进制. 他见到中国古代64卦后，认为与他的二进制符合. 这就是流传至今的佳话，但莱布尼兹二进制的发明在先，不是受中国64卦影响才有的.

数学家丙、丁来继承这个过程.“遗题继承”产生后,延续了100多年,有关的著作达到了几十种.

所谓“算额”,是指数学家把自己解答的问题写在匾额上,并
[136] 把它供献给多人集聚的神社的习惯.

这两个习惯是日本数学诞生后不久产生的东西.江户时代的交通不发达,印刷技术也落后,并不像现在的新闻杂志这样,数学家没有把自己想出来的数学问题的细节让很多人了解的方法,因此算额习惯是历史的必然产物.因为数学家争先恐后地解答数学问题,所以这个习惯大力促进了日本数学的发展.

1. 遗题继承的开始

从现在掌握的情况来看,从元和8年开始出版的数学书有:

元和8年(1622年),毛利重能《割算书》

宽永4年(1627年),吉田光由《尘劫记》(第一版)

宽永5年(1628年),作者不详《算用记》

宽永8年(1631年),吉田光由《尘劫记》(第二版)

宽永11年(1634年),吉田光由《尘劫记》(第三版)

宽永16年(1639年),今村知商《竖亥录》

宽永17年(1640年),今村知商《因归算歌》

宽永18年(1641年),吉田光由《尘劫记》(第四版)

宽永20年(1643年),吉田光由《尘劫记》(第五版)

宽永20年(1643年),作者不详《万用不求算》.

这些书是在宽永年间出版的数学著作.虽然说是《尘劫记》(第五版),但是也有小型本和大型本,不可能调查清楚重复的版本.由于《尘劫记》是非常好的书的缘故,被他人擅自出版,即所谓的“盗版”书出现了不少.

话归正题,吉田光由在宽永8年的小型《尘劫记》中第一次提出了“遗题”12个问题.跋文中说:

今此卷除此法,所出之处有十二,勘者(数学家)注释此算法

传世.然注释有轻重哉.此注释已失原算法之意,其身之心内,以 [137]
类分是可有相违.虽自有勘之器用(有数学方面的才能),然无师者不知勘者之深矣(数学的深奥).

下面举其中12个问题中的第一个问题.

二组四色

松木　八十根

槐木　五十根

(合计银二贯七百九十匁)

松木　一百二十根

杉木　四十根

(合计银二贯三百二十匁)

杉木　九十根

栗木　一百五十根

(合计银一贯九百三十二匁)

栗木　一百二十根

槐木　七根

(合计四百一十九匁)

问:槐木、松木、杉木、栗木的一根各值多少银?

设槐木、松木、杉木、栗木的一根分别值 x,y,z,u,那么,联立下面的四元一次方程组就可以了

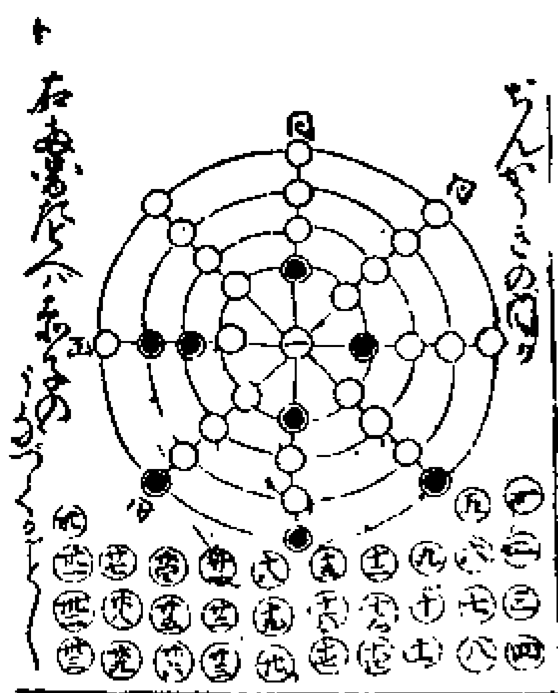
$$\begin{cases}80y+50x=2\ 790,\\120y+40z=2\ 322,\\90z+150u=1\ 932,\\120u+7x=419.\end{cases}$$

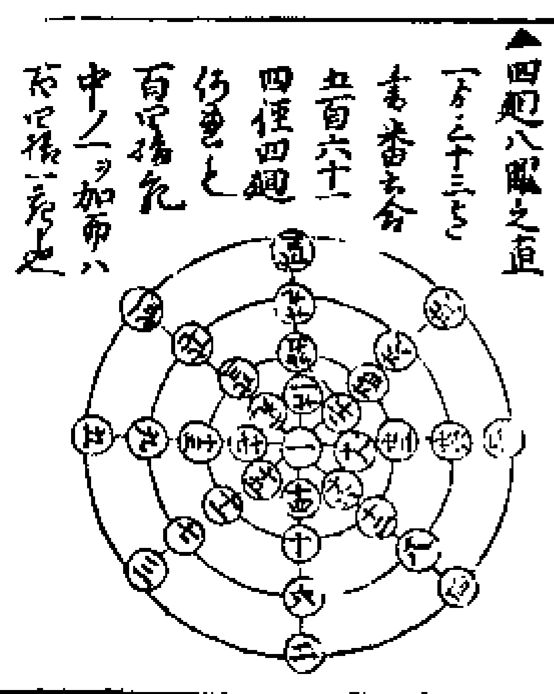
这是一个非常有趣的问题,除此之外,还有勾股积、圆截积、三组三色、盈朒法、方台、圆台、栗石①积、圆弦截和九连图等复杂的问题.

---

① "栗石"是一种小圆石子.

九连图是一个圆阵.下面的照片是《改算记》中的书影,作者说:“右边两个图,如婴儿点头那样”简单,他没有给出解答.其他照片是从《算法阙疑抄》中拍照的,这是一个将从1到33的数如
[138] 图20排列后,直径上和圆周上的数之和相等的问题①.





[139] 图19 引自《改算记》　　图20 引自《算法阙疑抄》

初期的和算就是以这些遗题为中心发展起来的,这样说并不过分.与《尘劫记》的遗题有关的主要著作如下:

回答《尘劫记》的著作:《参两录》(1653年),《算法阙疑抄》(1661年),《圆方四卷记》(1657年),《改算记》(1659年),《算法至源记》(1673年).

回答《改算记》的著作:《算法至源记》(1673年),《算法根源记》(1669年),《古今算法记》(1671年).

回答《算法阙疑抄》的著作有:《阙疑抄之答术》(关孝和),

① 这在中国属于圆形纵横图.南宋杨辉著作中已有,见李俨《中算史论丛》第一集,1954年,第175页～229页.

《童介抄》(1664 年),《算组》(1663 年),《古今算法记》(1671 年).

回答《古今算法记》的著作有:《和汉算法》(1695 年),《算法明解》(1667 年),《发微算法》(1674 年,关孝和).

由于这些系统非常复杂,这里不能全部论述.远藤利贞遗著《增修日本数学史》(1918 年)和日本学士院编的《明治前日本数学史》第一卷(1954 年)中有详细介绍.



图 21 关孝和《发微算法》.

2. 关孝和

这里引人注目的是关孝和.毋庸置疑,关孝和是日本最伟大的数学家.孝和解答了自己同僚砚村吉德的著作《算法阙疑抄》,关孝和、砚村吉德都是高原吉种的老师.孝和的《阙疑抄之答术》没有能够出版,流传的是手抄本.这可能是他学习时期的著作.

据说,另外一部孝和回答的著作《古今算法记》的作者泽口

一之，一开始也是孝和的同僚，但他看到了关孝和的解答后，非常钦佩孝和的才气，后来当了孝和的弟子.

孝和在《发微算法》的序文(图 21)中写到："《发微算法》序，近日算学盛世为甚.立门著书者不胜枚举也.有《古今算法记》，
[140] 设难题一十五问.迩来，四方算学者，虽手持此书，却为其高深而苦.且未见其答书，云云."文章的末尾有："延宝二年十二月关氏孝和叙".延宝二年是 1674 年，因此，《古今算法记》出版的第三年孝和解答了书中提出的问题.孝和生前出版的著作只有这一部.

虽然不能明确知道关孝和的出生年①，但能够推断《发微算法》是他 30 岁左右出版的著作.《发微算法》出版不久，因书肆的火灾而板木被烧毁，书也绝版了.流传下来的原书只有一本.但是，在《发微算法》中，论述了关孝和发明的"点窜术"，后来他的弟子建部贤弘出版《发微算法演段谚解》后才得以流传下来.

《发微算法》的第一问：

"如图②，大圆中内接一个中圆和二个小圆.此时，从大圆减取中圆和小圆后剩余部分的面积为 120 步.已知中圆和小圆的直径之差为 5 寸，试求大中小圆的直径."

这个问题的详细解答在《林鹤一博士和算研究集录》(1937 年)上卷的第 9 页～第 17 页上有，是建立 6 次方程组解答的.

吉田光由第一次提出遗题的是在 1641 年，33 年后人们看到了《发微算法》的出版.如此短暂的时间里能够提出解决这么漂亮的方法，这难道不是"遗题继承"的缘故吗？

但是，从反面也应该看到，这种"难问注意"的流行以及以极其复杂的计算为主的倾向，导致了轻视理论的弊端.今天的人学考试中不也存在类似现象吗？

---

① 一般认为是约生于 1642 年，卒于 1708 年.

② 图 21 左侧的图.

第10节 算　额

1. 神壁算法 [141]

如前所述,遗题继承和算额是日本数学的两个重要特点,算额除单纯的扩大问题以外还具有更深刻的意义.幸田露伴的小说《五重塔》中有"这,就是神壁算法"的句子,这神壁算法是从算额产生的熟语.在辞书中解释为"难问"(难题),但神壁算法这个熟语具有满意的问题、付出毕生精力的问题等心境.数学家把自己刻苦研究而得到的问题,挂在神社佛阁的墙壁上,以表达对神的感激之情.



图 22　千叶市,千叶寺观音堂揭额.

2. 算额的开始

现在还不清楚算额是从何时开始出现的,但可能是在和算诞生的初期.最早的记录出现在延宝元年(1673 年)的村濑义益

的著作《算法勿惮改》中：

“当有人去武州目黑不动堂参拜时，看到了墙壁上挂着的数术问题．问题中说：花小判（银子）一千五百两买槐角五千三百四十六根和梅角九千九百九十六根，对于一两银子梅比槐便宜二
[142] 根四分．问一两银子能够购买槐和梅各多少？

当时，经常把算法写在神社墙壁上．”

这说明了当时的江户①街上的神社墙壁上有很多算额．

由于这本书中有宽文10年（1670年）的序文，所以可以断定宽文10年以前已经有了算额．如果说起宽文10年，如前所述，关孝和出版《发微算法》的延宝2年的前4年．关孝和年轻的时候，已经出现非常多的算额，所以他深受了这个氛围的影响．



图23 福冈县箱崎八幡宫的算额．

3. 算额习惯

从性质上说，算额是容易被人们遗忘的东西．被保存下来的仅仅是其中的一小部分．我尽可能地收集很多记录，在进行调查
[143] 研究后发现，宽政（1789—1800）、享和（1801—1803）、文化（1804—1817）、文政（1818—1829）年代，算额非常流行，在一年

① 江户即东京．

时间里全国出现 100 多张算额. 其总数达到了几千张. 大约在 150 年前的文化和文政时代的算额现在几乎都见不到了.



图 24 明治 45 年千叶六郎领其弟子向盐釜神社奉献算额留念. [144]

清水义雄氏曾经周游全国收集算额,并整理发行了《社寺奉纳算额集》(昭和 17 年,誊写本),由此可见,战争前全国还有过 150 多个算额. 现在更稀少了.

现在的最早的算额是于元禄 4 年(1691 年)长谷川鄰完奉献给京都八坂神社的算额了. 由于经受了 250 多年的风吹雨打,几乎看不清文字了. 幸亏在京都地区的北野天满宫和伏见御香神社也能看到新的算额.

八坂神社中的最早的算额是享保 18 年(1733 年)齐藤重基给滨松鸭江观音堂奉献的算额,但可能是在战乱中被烧毁了. 其后的较早的算额为宝历 9 年(1759 年)户板保佑给仙台大崎八幡宫奉献的算额了.

超过 200 年的算额只有两三个了,150 年前的东西也少了.

现在所保存的都是 100 年前的算额.

在战争前的东京都的不忍池的边曾经有过东渊寺.其附近现存的还有府中大国魂神社、千叶寺、成田不动尊、大宫冰川神社等神社，群马县和崎玉县的神社里也有很多算额.东北地区的山形县、宫城县等地也能见到一些.长野县的善光寺、宫岛的严岛神社、博多的箱崎八幡宫等神社，由于集聚的人多的缘故算额保存到现在.

算额习惯，到明治时期仍风行一时，但大正 6 年后藤算斋等人为纪念会田安明的百年纪念而给山形市汤殿山神社奉献的算额、大正 13 年佐久间久四郎给名古屋大须观音奉献的算额、大正 5 年的崎玉县深谷町榆山神社的算额是最后的算额了.从宽政 10 年开始流行 250 多年的算额习惯是世界奇观.

4. 作为道场的神社佛阁

把自己得意的问题献给神社以表示感谢，这样就产生了算
[145] 额.由于神社是很多人集聚的场所，所以，为神社奉献算额以后有机会让人们看到它.这样，算额也起到了被人知晓自己的告示板的作用.没有新闻报纸的当时来说这也是很自然的事情，但这也变成了显示个人的才华和学派势力的手段.

因此，学习数学的人周游全国神社去研究数学.例如，江户古时候的爱宕山，收到了很多算额，其中常有一些批判某些问题的纸片.

算额是凝聚个人精神的东西，所以，额上写的字也是非常漂亮的.它是使用各种颜色来装饰的非常美的东西.现在也能见到美丽大方的算额.由于千叶寺的算额保存完好，所以，给读者提供了图 22，只好让读者自己尽情地想像了.

由于算额的问题是漂亮的问题，所以，出版了一些问题集.

藤田贞资:《神壁算法》，宽政元年(1789 年)；

藤田贞资:《续神壁算法》，文化 4 年(1807 年)；

白石长忠:《社盟算谱》,文政 10 年(1827 年);
堀池久道:《揭楣算法》,天保 9 年(1838 年);
斋藤益义:《数理神篇》,万延元年(1860 年);
石黑信由:《算学钩致》,文政 2 年(1819 年);
中村时万:《赛寺神算》,(手抄本).

其中,《神壁算法》和《续神壁算法》是藤田贞资从全国弟子们中收集并严格精选的,所以是一部促进数学发展的优秀读物.

《数理神篇》是群马地区的算额,《算学钩致》是富山县的算额,我们看到这些著作后对丰富的地方性算额一定会惊叹不已的. [146]


数理神篇巻之上
乾坤獨擅
安原喜八郎千方編
大亜細亜州日本国
安原長治郎安常訂
答曰如左

图 25 斋藤益义《数理神篇》.

最后的《赛寺神算》虽然是手抄本,但它收集到了从享保到文政 100 多年间的 400 多道算额题. [147]

第3章 物语Ⅲ

第1节 时 刻 法

现在人们几乎不关心时刻法了．如，“江户时代，早晚调节时钟是妇女的一种爱好”，人们可能不知道这句话的意思了．



图1

现在的人们毫无介意地把古书中的"某人一年中寅时起学习"直接翻译成"一年早晨4点钟起床".

现在的有些作家随便使用古代记时方面的语言,经常看到小说中产生矛盾.更有甚者,在辞书中关于时刻法的说明也出现了混乱. [148]

1. 东西时刻法的制度

人们在社会活动中有通用时刻法是很有必要的.制定时刻有不定时法和定时法两种.在不定时法中,虽然等分白天和黑夜,但因一年四季的昼夜长短的不同,夏季的白天多一个小时,冬季的白天少一个小时.虽然这种定时法有些不方便,但在公元前3 000年,它起源于古代埃及,又被古希腊和罗马人继承,在大约4 000年间支配了人类的日常生活①.



图 2

在日本江户时代的250年间也使用了不定时法.在西方,出现现代时钟以前,也使用了和江户时代的不定时法相同的方法.

---

① 应该说支配了地中海周围的人类,东方有自己的一套时刻法.

这种时钟放在振天府里，是按照昼夜时间的长短进行调整的装置．殿中的妇女早晚必须替换振天府的位置来调整时间．

英国等西方国家也曾经有过像振天府式的时钟，也要调整
[149] 早晚的时间．

毋庸置疑，不定时法是一种原始的方法．不能制定标准时刻的时代，以日出和日落为标准，等分其间的时间也是理所当然的事．

据说在日本最早开始设立时刻制度是在齐明天皇 6 年(660 年)，当时的皇太子天智天皇制作了漏刻器，把一天 100 等分了．虽然还没有找到究竟是 100 等分、50 等分还是 48 等分的确切资料，但通过其他资料能够判断等分一天时间的结论．下面的《延喜式》显示，曾经有过用敲鼓来准确地通报工作人员上下班时间的方法．

采用定时法等分一天是一种进步的方法．到战国时代①后这种用漏刻方法不能准确测定时刻了，因此，不知在何时定时法消失而出现了不定时法．

到江户时代后，德川家康在江户本石町，把早晨 6 时刻和晚上 6 时刻，就是日出(正确的是 2 刻半前)和日落(正确的是 2 刻半后)用敲鼓来通知时间．但到了第二代的秀忠时代后，最初，等分一天时间，通知五、四、九、八、七的时辰．

这个不定时法一直使用到明治 5 年．

因此，正如一开始所论述的，虽然说是相同时刻“寅刻”，但是，在王朝时代和江户时代所表示的时间是不同的．这是引起辞书中出现说明混乱的原因．

后面将要论述，江户时代也混合使用过五、四、……的名称和卯、寅、……的名称．

---

① 战国时代为日本的战国时代．

2. 王朝时代的时刻制度

首先，关于用什么语言来表示时刻，《枕草子》中有记载：

"夜里时（中间略）出丑三、子四的（不确定）声音。" [150]

这说明了清少纳言在宫中做事时阴阳寮的人们根据漏刻通知时间的事实.因为在文章中有丑三、子四、子九、丑八等语言，所以，由此可以知道当时使用了十二支的子（鼠）、丑（牛）、寅（虎）、卯（兔）、辰（龙）、巳（蛇）、午（马）、未（羊）、申（猴）、酉（鸡）、戌（狗）、亥（猪）来记时的史实.



图 3

了解记时制度，最古、最好的文献是《延喜式》.《延喜式》是在醍醐天皇的延长 5 年（927 年）被制定的，是制定当时诸制度的东西.其中，官吏进出宫的时间如下：

大雪十三日起，至冬至十五日.

辰之一刻三分日出.申之四刻六分日落.

卯四刻六分敲开诸门之鼓.

辰二刻七分敲开大门之鼓.

午一刻六分敲退朝鼓.

酉一刻二分敲闭门鼓.

小寒一日起,至十二日.

辰之一刻一分日出.申四刻七分日落.

卯四刻五分敲开诸门之鼓.

辰二刻六分敲开大门之鼓.

午一刻五分敲退朝之鼓.

酉一刻三分敲闭门之鼓.

[151] 最近,桥本万平氏由这些资料得出下面的结论:

1. 根据十二支将一日进行 12 等分.这叫做一辰刻.

2. 一辰刻又被分 4 刻.

3. 一刻又被分 10 分.

4. 从而 1 日被 48 等分.

巳 4 刻 9 分—
午 1 刻 ——
1 分—
2 分—
3 分—
4 分—
5 分—
6 分—
7 分—
8 分—
9 分—
午 2 刻 ——
1 分—
… ……

时刻是从夜间 12 时开始.与现在的时间相比较为困难,但是“子一刻”可能相当于半夜 11 时左右.此外,将 1 刻 10 等分的“分”的读法如下:

由桥本先生的研究可以看出,将 1 日 48 等分,在当时的中国和朝鲜的制度中未曾有过.这不仅是记时法,而且说明王朝时代各方面的制度并不是囫囵吞枣地接受了大陆各方面的制度.

王朝时代以后的数百年中,虽然采用了《具注历》,但却在《具注历》中将 1 日分 12 时辰的同时,又引进中国的制度,也使用了将 1 日分 100 刻的制度,从

而导致了记时法的复杂性.

由前面所述《延喜式》推断,如果把开大门的时刻作为开始勤务时刻的话,那么官吏在一年中日子最短的时候一天最好是做 4 个小时的事务.由此可知,有

子、午为 9,丑、未为 8,寅、申为 7,卯、酉为 6,辰,戌为 5,巳、亥为 4.

在这些时辰之间,各个时刻分别敲钟 1、2、3、4 下.

《枕草子》引文中的"子九"和"丑八"等,可能是表示半夜敲鼓的次数.

如果是那样,那为什么敲打这样的数呢?在古书中说,原本敲鼓应该从 9 开始,9×2=18,9×3=27,9×4=36,9×5=45,9×6=54,但这样敲数过多,后来就改为敲其端数就行了. [152]

由于"午"表示 2 个小时的间隔,在"午"的何时敲了钟不得而知了.江户时代在"午"的正刻敲鼓.当时 1 辰刻被分成初刻和正刻两个阶段."午"正刻的开始恰好是午的中央.这可能是"正午"这个词的来源吧.

1 辰刻是 2 个小时,$\frac{1}{4}$的 1 刻为 30 分钟,可见,当时已经达到现在时钟水平,能够正确地持续时刻这并非易事.天皇行幸的时候,必须由漏刻博士来调整时间.后来社会动荡不安,拥有实力的漏刻博士又不存在了,这个制度也就不知不觉地被废止了.

3.江户时代的不定时法

后来王朝时代进步的定时法被人们完全遗忘掉了,到江户时代后采用原始的不定时法就是理所当然的事了.

如前所述,在子、丑、寅……的时刻,因为敲钟分别为九下、八下、七下……,所以,这就成为了时刻的名称.其中,由于早晚有相同的名称,容易产生混同,所以,古代并用了子之刻、丑之刻、寅之刻等记时法.此外,早晚分别敲六下,表示相同的状态,

这样可能使用起来更方便.

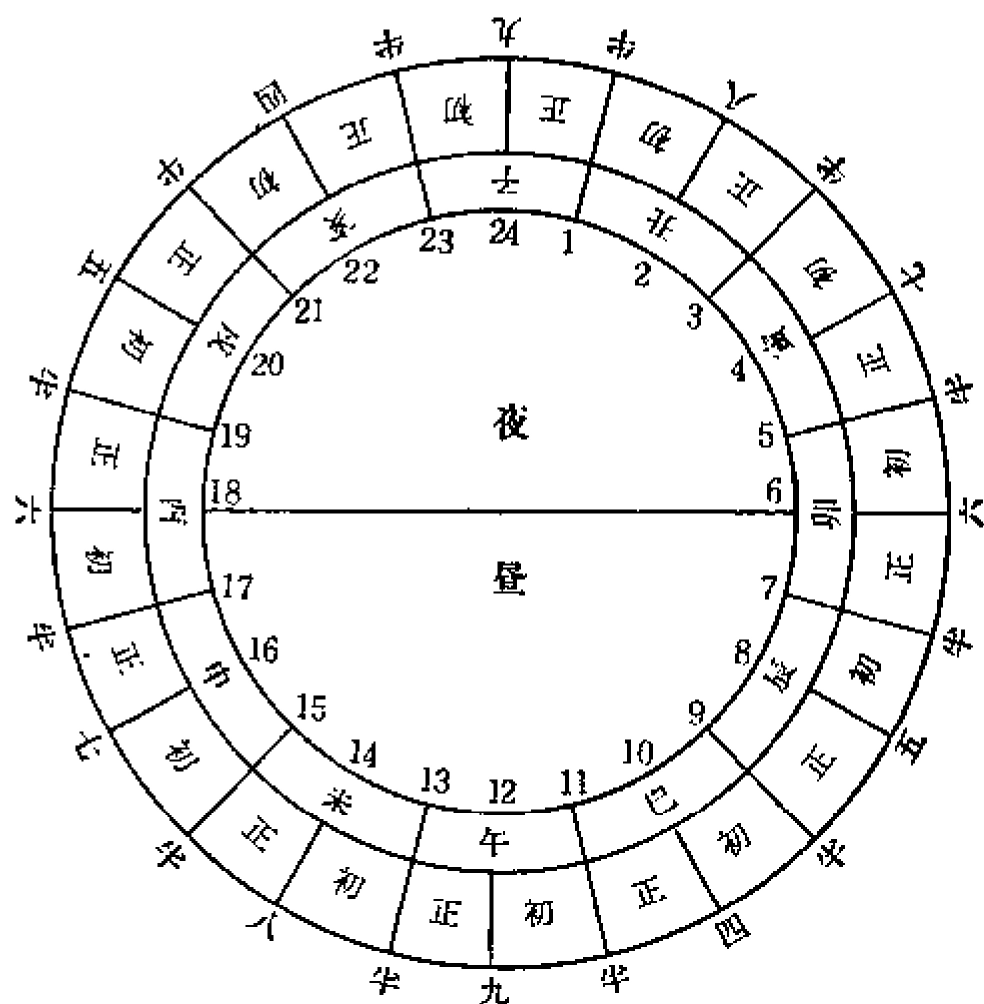


图 4

在王朝时代,将 1 日 12 等分,每分作为 1 刻,记 1 辰刻的 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{10}$,但到了江户时代后反而使用了 12 等分的记时法. 例如,宽文 6 年(1666 年)的日历中把进人“节”①的时刻记为:

“午时进人七月节.”

仅仅写了午时,没有写其他细分的时间. 贞享 2 年(1685 年)的记时为:

[153] “未之三刻进人正月节.”

① “节”:(1)节气;(2)进人一个月的前半月的时间.

这是最早把时间记到如“未之三刻”的刻的程度.

那时，从中国传入了历法，作为学术来讲不定时法不方便，起不到应有的作用，因此，学术性地采用了将 1 日进行了 100 等分并作为刻(又称为分)，又将 1 刻 100 等分并作为秒的 100 进制法.(平山谛著，《圆周率的历史》第 224 页)但是，由于已经形成了习惯，在日常生活方面未能改变使用不定时法的状况.这样，一直到明治 5 年继续采用了不定时法.

江户时代作为公历使用的历法有四种：

贞享历(1685—1753)涉川春海；

宝历历(1754—1796)土御门泰邦；

宽政历(1797—1841)高桥至时；

天保历(1842—1871)涉川景佑.

由于各种历法在不同时刻的分割方法也有所不同.首先，说 [154]
明根据最古老的《贞享历》的时刻分割方法.图 5 是宝永 6 年(1709 年)出版的远藤盛俊(1672—1734)的《昼夜长短之图》的一部分.原图的宽度约一米，记了 7 个圆周，无法写出全图，这里只表示了冬至、春分(秋分)、夏至的昼夜长短.

远藤盛俊是仙台人，涉川春海的历学上最好弟子.

原则上，把从日出到日落和从日落到日出期间进行 6 等分作 1 辰刻，但实际上日出前和日落后还有一段明亮的黄昏时间，把这一段时间作“二刻半”，早和晚把夜间的时间缩小了一些.这里的“二刻半”的 1 刻为 1 天的$\frac{1}{100}$，相当于现在的 36 分钟时间.

于是把日出的“2 刻半前”定为“明六个”，日落的“2 刻半后” [155]
定为“暮六个”.把这个“六个”和“六个”之间的时间进行 6 等分来确定时间.在图 5 中从外按面夏至、春分和秋分、冬至的顺序表示出来，这里没有必要再说明了.子和午的时刻没有变化，其他时辰随节气的变化而变化.“日”这个点正是日出和日落的时刻.

在这个方法中，虽然有基点，由于有“明六个”和“暮六个”的

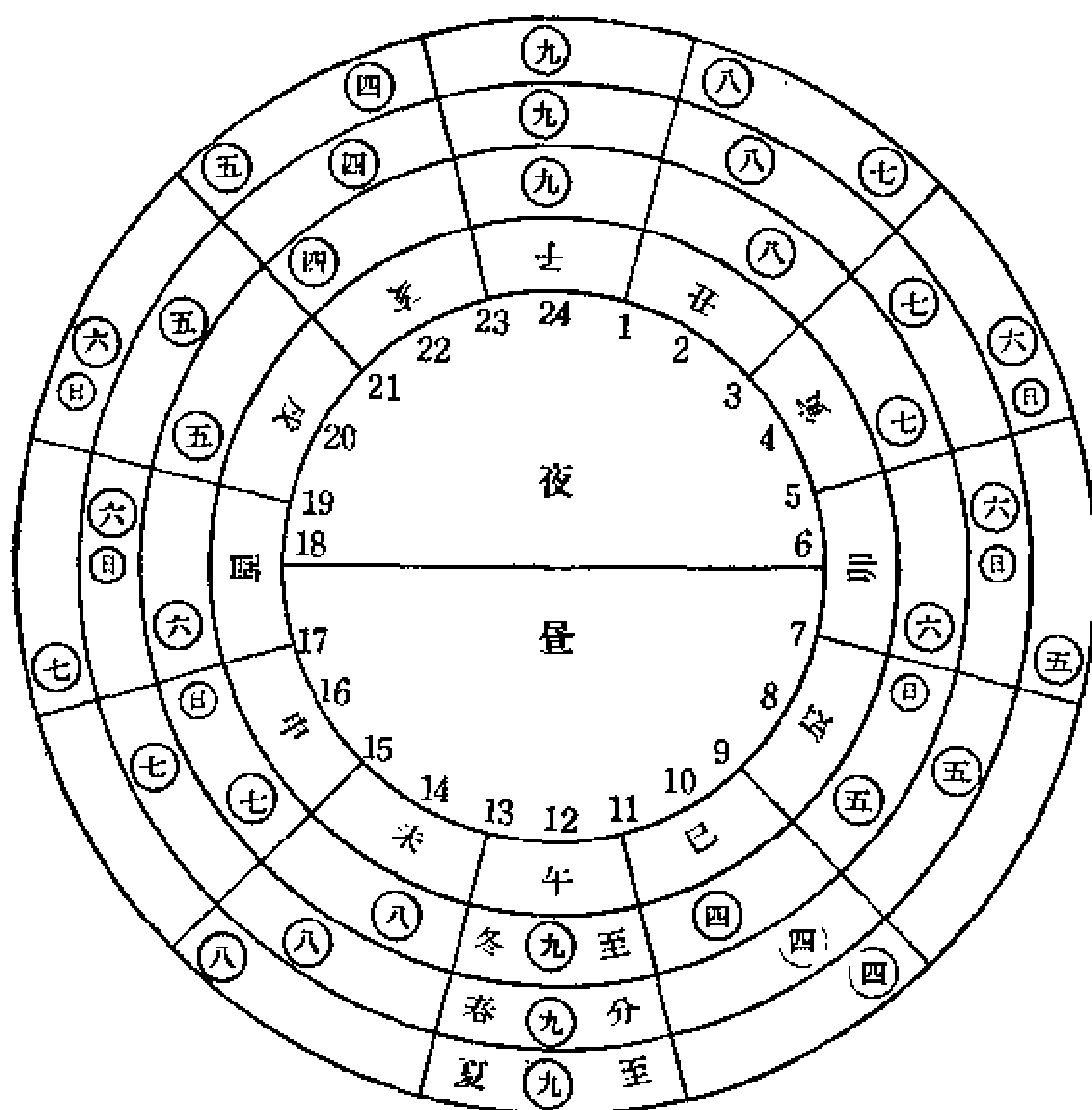


图 5

缘故，所以确定时间的方法是非常麻烦的．在宽政时期，西方历法传入日本以后，黄昏的时间比“2 刻半”长了一些．

因此，“点心”的时刻“八个”在冬至为下午 2 点钟以前，夏至为接近 3 点钟．

为参考方便起见，从江户时代宽政年间所发行的历书中举列“昼夜长短、日出和日落”的时刻表（由于历书的不同而有不同的时刻）．

根据 24 节气来分一日，为了简单起见采用了正月节、正月中、二月节、二月中、……的记录方法．这当然是旧历了．把时刻

12 等分为子、丑、寅、卯、……，把 1 辰刻 10 等分后，如按卯，卯之 1，卯之 2，卯之 3，……，卯之 8，卯之 9 的顺序来命名. 和现在的时间比较就相当于 12 等分，可是在王朝时代细分到 3 分.

		昼	夜	日出	日落
正月节，	十月节	43.5 刻	56.5 刻	卯之 8	酉之 2
正月中，	九月中	45.5	54.5	卯之 7	酉之 3
二月节，	九月节	47.5	52.5	卯之 6	酉之 4
二月中，	八月中	50	50	卯之 5	酉之 5
三月节，	八月节	52.5	47.5	卯之 4	酉之 6
三月中，	七月中	54.5	45.5	卯之 3	酉之 7
四月节，	七月节	56.5	43.5	卯之 2	酉之 8
四月中，	六月中	58.5	41.5	卯之 1	酉之 9
五月节，	六月节	59.5	40.5	卯	戌
五月中，		60	40	寅之 9	戌之 1
十月中，	十二月中	41.5	58.5	卯之 9	酉之 1
十一月节，	十二月节	40.5	59.5	辰	酉
十一月中，		40.5	59.5	辰之 1	申之 9

图 6

[156]

夏至，白天的 1 小时和夜间的 1 小时的时间差最明显. 上表是日出和日落的时间表，在当时的记时法中，因日出和日落的 2 刻半而夜间的时间要短，因此，夏至时大致白天为 65 刻、夜间为 35 刻. 于是，白天的 1 辰刻相当于夜间的 1 辰刻的 2 倍. 因此，古代特别地设立了与时钟有关的叫“振天府”的机构来调整昼夜时钟的时针.

再看俗语中说的“丑三”这个词吧. 首先，假设把 1 辰刻如王朝时代那样 4 等分，那么，在定时法中，“丑三”就相当于现在的夜间 2 点钟到 3 点钟之间的时刻. 但是，在江户时代的不定时法中，它就是指夏至时候的 2 时，冬至时候的 3 时.

又如前面表(图 6)所示，有卯，卯之 1，卯之 2，……，卯之 8，

卯之9的叫法，因此，阅读古代故事书时必须要注意判断当时记时法．如，必须要了解什么时候的书、当时记时法的叫法等事项．最近在报纸杂志的作者中，也有一些随便使用记时法而闹出笑话的．

从现在的角度看，使用当时复杂的记时法而出现错误是不可避免的，实际上江户时代就已经出现了官吏之间乱用记时法的混乱现象．

4．记时的混乱

在江户时代，学术性地把1辰刻分为"卯之初刻"和"卯之正刻"[①]两个部分，这可能是通俗地使用了从王朝时代所惯用的上刻、中刻和下刻的名称．上刻、中刻、下刻究竟是哪一段时间并不

[157] 清楚，关于这一点，平山清次在《历法及时法》中，连当时"老中"[②]的信笺也没留下详细地论述了．

对此有两种说法．

其一，所谓上刻是敲时钟的时间，中刻是从上刻半时（现在的一小时）后的时间，下刻是与下一个上刻相一致的时间．

其二，上刻就是初刻，敲钟前的半时（现在的一小时），所谓中刻就是正刻，即敲钟的时刻，下刻是从那以后半时后的时间，即为下一刻的初刻．

上野的山上，敲钟的宿坊[③]主张前一个说法，而幕府的老中主张后一说法．于是，正午敲钟的时间在两者之间差一个小时．

以上是在平山清次《历法及时法》（1933年）中的研究结果，山口隆二在《日本的钟》（1942年）中也说明了相同的情况．

---

① 中国叫"卯初"和"卯正"．

② "老中"是对一种职位的官员的称呼．

③ 宿坊：参拜神佛者在寺院里的住所．

第2节　东西方位的测定

1. 班田制及其遗痕

大约在1 300年以前，大化改政时期①，土地是国家所有的，男女到了6岁后，由国家赐给男孩2段②、女孩1段120步土地．为了严格执行班田制度，首先，必须要准确地测量土地，公平分配．因此，如棋盘的子目那样分配田地．现在也能看到它的遗迹．例如，如果以5万分之1或2万分之1的地势图看奈良地方(特别是其南方)的话，我们可以注意到它正确地覆盖东西南北，有十几公里的平行道路延伸的情景(图7)．



图 7

① "大化"是公元645年～649年，日本孝德天皇的年号．

② "段"是日本的土地面积单位，相当于992平方米．古时也用于距离，1段近似地等于11米．

今天,某些部分被中断了,让人产生在1 300年以前的日本人进行土地测量的感觉,实际上也确实如此.

班田制度的根本问题是田的面积.关于这一点,在《令义解》卷二中有如下论述:

[158] "凡,田长三十步,广十二步为段.十段为町.一段地上种五十束稻.一束稻得米五升.即一町地得五百束米.段之租稻为二束二把,町之租稻为二十二束."

由此可见,一段地上可以收250升粮食.由于给男孩2段地,则能收500升粮食,再减掉作为税金的4.4%,最后剩下478升,这就是男子1人1年的粮食.但是,如《一升枡物语》论述的那样,当时1升的单位,大约相当于现在的$\frac{1}{3}$升,因此,男子1人1年的粮食大约1石多,大体上和其他考证的结果是一致的.

2. 条里的制度

这是以"町"为面积单位来确定耕地的制度.36町为1里、这里的町和里都是面积单位.后来把长度的36町作为1里是原来与条里单位混合使用所导致的.

1段为30×12=360步,1町为10段,即3 600步,1町为边

[159] 长为60步的正方形.因而,1里为60×6=360的四边形(矩形)的田.我们从《拾芥抄》(室町时代出版的一种百科辞典)中看到,如图8所示,分成36个町,并分别给它们起名.1步大约等于现在的1间,条里的1里(这是面积)的一边为1里(长度),因此,古代的里是现在的$\frac{1}{6}$,即应该相当于6町.

这里,我们再看一看奈良时代的地图(图7,图8).从奈良市到畝傍①,从北到南有直线的道路,与这条直线道路直交的像无

① "畝傍",垄的旁边.

60步x6

36	25	24	13	12	1
35	26	23	14	11	2
34	27	22	15	10	3
33	28	21	16	9	4
32	29	20	17	8	5
31	30	19	18	7	6

图 8

数的里道的遗迹，由此我们可以注意到它可能是 6 町里的道.

图 9

1 里的条里的面积为 36 町. 古代的学者们已经论述过了这种混合使用从何时开始把 1 里作为 36 町的问题.

把 1 里的班田以纵横方式分别排列了 36 条里. 这样，从东西的一角开始如图 9 按顺序起序号的名称，并叫做班田. 如叫做三条二里，或四条三里. 现在，岐阜地区也有十四条村，十七条村，十八条村，十九条村，五里之里，六里村等地方名称的依然存在正是说明了这一点.

3. 东西方位的确定

这里进入主题. 首先,必须正确地确定东西方向. 如果确定了东西方向,那么根据直角三角形的三边的3,4,5的性质(叫做三四五的矩),来正确地确定与东西正交的南北方向.

首先要考虑到的是指南针,据说是古代中国发明了指南针.
[160] 奈良时代从中国的唐朝引进了指南针①. 即使是引进了,但是指南针本身就有偏角的问题,因此,条里的测量并不是根据指南针来进行的.

其他理由是,(1)利用北极星;(2)利用日影. 这里不去论述究竟利用了哪一个,我在下面稍微论述人们不大注意的后一个问题.

中国的最早论述确定东西方位的文献是《周髀算经》. 据说该书成书年代为公元前10世纪,我们今天看到的是汉代的赵君卿注释的版本. 因为是汉代,所以注释书大约是在公元后的100年左右. 唐代以后,奈良时期,该书传入了日本. 而且,奈良时代该书传入日本的记载被保存下来了.

实际上,《周髀算经》的方法在中国的城市建设中发挥过作用,因此,在日本的班田测量工作中也肯定利用了它.

4.《周髀算经》的方法

在现在的传本中,确定东西方向的文章有两处. 虽然两篇文章的论述并不清楚,但下面还是简单地介绍一下.

"故东西极二万三千里,其两端相去正东西,中折之以指表,正南北."

---

① 中国何时发明指南针,还有争论. 早期在公元前3世纪、4世纪,人们已发现天然磁石的指极性. 大约到唐代就有了人造指南针,北宋有各种记载,13世纪用于航海.

这段文字的前面有：立杆，日出和日落时，计算该杆影子的长度．然后，接着就是上面的引文．

还有一段引文：

“以日始出，立表而识其晷；日入，复识其晷．晷之两端相直者，正东西也；中折之指表者，正南北也．” [161]

这一段引文的前面有“正四方之法”．这里的表就是杆，晷是影子．日出和日落的瞬间的影子为相当遥远①，能够与它适合的广袤的水平平面是少有的．另外，想要实际测量土地时，东边或西边有座山的话，那是正确测量的最理想的情况了．

这里，从好的方面去解释“中折之指表者，正南北”后，在道理上是顺理成章的．

以表的正下面为中心作圆．再连接表的尖端的影子的轨迹和该圆的交点，那么，它应该是东西方向．又按正中间折一下，就是南北方向．

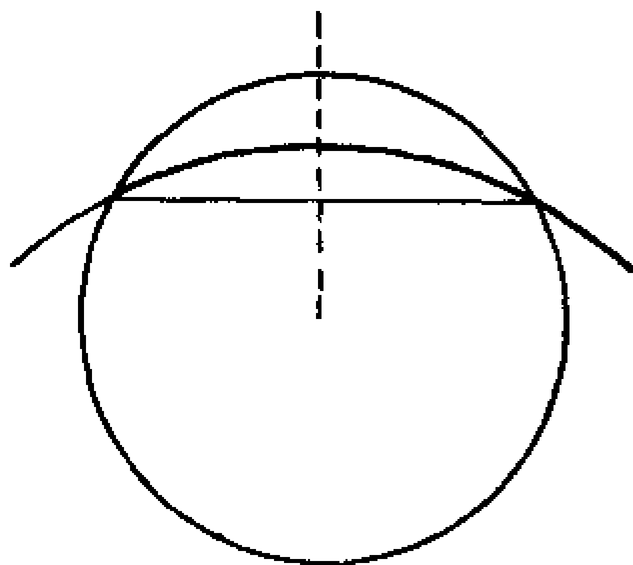


图 10

《周髀算经》中论述了根据北极星进行测量的方法．这里

① 不是正好在日出和日落，而是影端以立杆点为中心的某个同一圆上．

没有必要论述它了．无论如何，奈良时代的日本人确实正确地使用了这种测量方法．古代罗马建筑师维托陆维斯（Vitruvius）也使用了和这个方法完全相同的原理（根据太阳影子的测量方法）．

第3节　一升枡物语

在战争①中对枡量那么敏感，甚至严格到一升的$\frac{1}{100}$的日本人也没有关心过一升枡和一合枡的大小．为什么 64.827 立方寸这个数成为一升的枡量？

在战争结束不久编辑出版的文部省的初中数学教科书中有
[162] 关于枡的说明，提出了能够匹敌学位论文的问题“请调查枡的变迁历史”．我感到惊讶后找责任编辑问原委时，答复是根据平凡社的百科辞典编写的．于是，我去查了辞典，但辞典上只有枡的名称而已．我们真正不知道的历史知识也是相当多．因此，我在这里科学地论述枡的历史并不是一件无聊的事．

1. 现在的枡和古枡

现在的一升枡的大小为，其口边长为 4.9 寸的正方形，深度为 2.7 寸．这是明治 9 年(1876 年)2 月 19 日的太政官颁布的布告中确定的．为了保证枡的结实，当时在枡上固定了对角线的铁制的弦．因此有有弦和无弦的两种枡，有如下规定．

有弦的枡，一升：方四寸九分，深二寸七分一厘，弦的宽度一分八厘，厚度一分九厘五，“差引”②为六四八二七．

五合：方三寸九分五厘，深二寸九厘，弦的宽度一分八厘，厚

① “战争”是指第二次世界大战．

② “差引”是增减差额之意．

度一分九厘九,"差引"为三二四一三.

无弦枡,一升:方四寸九分,深二寸七分,六四八二七.

五合:方三寸九分五厘,深二寸七厘七五,三二四一四.

一合:方二寸一分,深一寸四分七厘,六四八二.

原来,有弦枡是量农作物时使用,无弦枡是量水、油等时使用的.但制作枡的技术表明,即使没有弦也能制作出非常结实的枡,因此,明治年间枡已经没有弦了,直到现在.

太政官的这个布告的基础是在 207 年前宽文 9 年(1669 [163]
年)出台的德川幕府的布告.这个布告中决定:一升枡的口方为 4.9 寸四,深为 2.7 寸.因此,现在的枡的制度可以追溯到 300 年以前的古代(图 11).

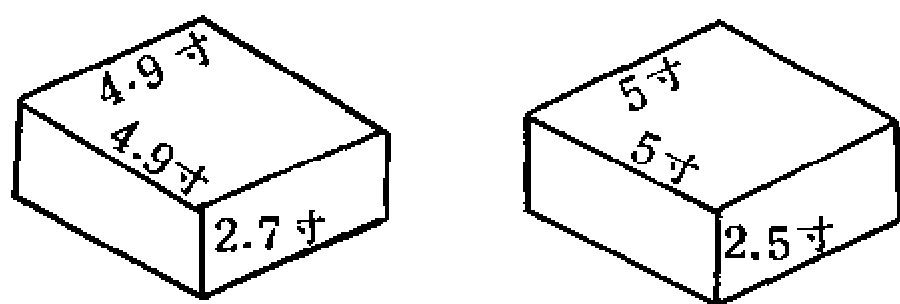


图 11

宽文 9 年的布告在全国统一以前,这种枡已经开始使用了.把它叫做"京枡",这区别于其他"古枡".据传说,丰臣吉秀制定了"京枡".

这两种枡的容量分别为:

古枡:5×5×2.5=62.5 立方寸

京枡:4.9×4.9×2.7=64.827 立方寸.

数学书中有古枡发展到京枡的大约时间是在元和与宽永时期(交替年是 1624 年)的证据.日本现存的最早的数学书是百川治兵卫的《诸勘分物》(手抄本)和毛利重能的《割算书》(刊本).这两本书是元和 8 年(1622 年)完成的著作,它们都记载了古枡的制度.

在测量木桶等容器的体积时，以立方寸算出体积后，再除以62.5，就会立即知道能装多少升. 然而

$$\frac{1}{62.5}=0.016,$$

故用16乘来代替用62.5除就是枡的量. 当时，战国时代刚刚结束，一般人的数学知识水平还是非常低. 除法计算还是属于高等数学内容，因此，用16乘来代替用62.5来除显得更合适（详细论述，请见平山谛著，《圆周率的历史》，1955年，第142页）.

没过多久人们就不使用这样方便的枡的制度，从那以后在所有的数学著作中都用京枡的制度说明. 但在毛利重能的《割算书》中，把口方五寸四、深二寸五分的枡叫做京枡. 因此，对于京枡来说也有古枡的证据，这是不能忽视的方面.

为什么废弃计算方便的古枡，而采用计算不方便的京枡呢？在这方面没有任何说明. 不管怎样，宽永初期出现的京枡，40年
[164] 后（宽文9年）在全国被统一使用，直到今天. 关于从古枡发展到京枡，有下面的传说.

叫做京枡，是因为这个京枡首先在京都制作的. 京都的人们为了多收农民的粮食，把古枡的口分别缩小1分（合计为2分），而把深度增加了2分来制作了新的枡.

$$5\times5\times2.5=62.5,$$
$$4.9\times4.9\times2.7=64.827.$$

这样制作的结果，一升的枡量增加了2.327立方寸. 京都人把新枡说成是“这次制作的新的什么什么神社的”，这样，多收卖粮农民的粮食. 善良的农民中有人可能以为缩小口2分，增加深度2分后的新枡和原来的京枡相同.

如果这个传说果真如此，那么现在的一升枡 $4.9\times4.9\times2.7=64.827$，不仅是计算起来不方便，而且，作为榨取农民粮食的纪念品，并不是宝贵的东西.

2. 古代的枡

这样，枡似乎是越来越大，但我们并不清楚历史的真实情况.虽然保存下来了二月堂十合枡、山科枡、近江枡、东大寺常十合枡、法隆寺枡、药师寺枡、东大寺枡等各种各样的名称，但我也不知道它们的容量.

比上述京枡、古枡稍微早的还有“武者枡”.枡口方为4.65寸四，深度为2.385寸，枡的容量为51.569 662 5立方寸.由名称可以推断，这可能是战国时代的武士们使用的枡.

伊藤东涯在《制度通》中论述过中国枡的大小问题.根据他的说法，唐代的10斛相当于现在的3斛，因此，枡的容量也是约3倍.

日本推古天皇15年(607年)，从唐朝引进了枡制度，但并不完全相同.从很早以前就有获生徂徕、狩谷掖斋等学者的研究，因此，这里要介绍泽田吾一的《奈良朝时代民政经济之数的研究》(1927年). [165]

(i) 谷仓的计算

在当时正仓院古文书中说，能够知道仓库里所装的谷物的体积.即，因为知道古文书记载的谷物的量、仓库的底面积和高度，所以就会知道一升的分量.草袋里装米是很晚的事，奈良朝时代也是把粮食直接装入仓库里.

泽田吾一计算了现在我们所知道的数十种谷仓的大小，而且考虑到谷物堆积的情况下根据其厚度计算多少，最后得出了当时的1升等于现在的4.04合的结果.

(ii) 1日的粮食

关于决定官吏的俸禄和农民的保留米等1日的粮食的多少的问题，也留下了很多记载.根据这些记录，1天1人所食用的粮食的标准是2升.如果现在的4合当作古代的1升的话，就相当于8合，即使减去酿酒的部分也足够食用.

(iii) 法隆寺的铜斗

法隆寺的铜斗也有“受一石四斗”的铭文. 计算其大小的结果,1 升就是 4.75 合.

由上面知道了 1 升大约等于 4 合或 5 合,我们从贫乏的资料中举出一二个来加以说明.

有一本叫做《润背》的书中记载了宽治(1087—1093)时代的枡的大小. 研究这本书的玉泉大梁说:“虽则有镰仓时代的记录,然足利末年也有一些学识,且已知道《九章算经》,巧于数理之僧人做伪记.”其中也记录了如下的宽治宣旨枡的大小.

一合枡	方二寸,深八分	$2\times2\times0.8=3.2$
[166] 一升枡	方四寸,深二寸	$4\times4\times2=32$
一斗枡	方一尺,深三寸二分	$10\times10\times3.2=320$
一石枡	方二尺,深八寸	$20\times20\times8=3\ 200$

这里 1 升=32 立方寸,与现在的 1 升进行比较的话,

32 立方寸÷64.827 立方寸=0.494…升.

由此可见,1 升为 4.94 合,稍微大于奈良朝时代的升.

当时全国有很多庄园,武士在自己的领地也制作枡. 上述宽治宣旨枡是公共制定的枡. 宽治前的 15 年以前,也有过延久宣旨枡,这就说明庄园的势力强大,因而枡的制度是混乱的.

宣旨枡上烙印了“宣”字样. 藤原贞干的《集古图》中有宣旨枡的图,其方 4.6 寸,深度 2.5 寸,但这可能是后世的东西.

至今的论述中,我们假定了长度是没有变化,实际上长度没有发生过变化. 天平尺、大尺、小尺等,这些都是因使用目的不同而发生变化的.

在 1 000 多年的岁月中长度没有发生过变化.

我们看现实的一升枡后,那是惨不忍睹,有些痛心的.

3. 数学著作中的枡

枡的大小也曾经是数学研究的对象. 宽永 11 年(1634 年)

[167] 的《尘劫记》中论述了各种枡的大小.

	宽(寸)	深(寸)		宽(寸)	深(寸)
一合枡	2.27	1.25	二合五勺枡	3.09	1.695
一合五勺枡	2.6	1.438	三合枡	3.21	1.887
二合枡	2.87	1.574	三合五勺枡	3.45	1.906
四合枡	3.61	1.99	八合五勺枡	4.64	2.56
四合五勺枡	3.72	2.05	九合枡	4.73	2.607
五合枡	3.88	2.15	九合五勺枡	4.82	2.66
五合五勺枡	4.014	2.21	一合枡	4.9	2.7
六合枡	4.12	2.29	二合枡	6.173	3.401
六合五勺枡	4.24	2.343	三合枡	7.067	3.894
七合枡	4.35	2.397	四合枡	7.778	4.285
七合五勺枡	4.45	2.455	五合枡	8.378	4.616
八合枡	4.54	2.516	一斗枡	10.563	5.823

图 12

文　献

狩谷掖斋,《本朝度量权考》(日本古典全集,昭和 2 年,1927 年)

玉泉大梁,《室町时代的田租》,(大正 3 年,1914 年)

泽田吾一,《奈良朝时代民政经济之数的研究》(昭和 2 年 9 月,1927 年)

第4节　关于汉数字

最近,在书刊上经常介绍古埃及纸草纸的数字、希伯来①的楔形文字和印度·阿拉伯数字,已被人们了解,但人们不大了解

① 一般均指美索不达米亚早期苏美尔人,巴比伦人使用楔形文字.

我们从古代一直到现在所使用的汉数字情况，因此，这里论述汉数字的由来.

最权威的著作是现在的中共副总理、中国科学院院长郭沫若在日本避难时(1933 年)完成的《卜辞通纂》四册. 在《卜辞通纂》中，根据带到日本的殷虚出土的约 3 000 片甲骨，综合了罗振玉、王国维等学者的研究，不仅是数字方面，还利用了约 1 000
[168] 个图录阐明了古文字.

纸草纸的文字和希伯莱的楔形文字中的数字，是最近才被解读的. 同样，按照干支、数字、世系、天象、食货、征伐的顺序也说明了甲骨文. 这里举出的照片中，第一个照片(图 13 左)中包含了很多与数字有关的文字，第二、第三照片(图 13 右、图 14)中包含了与天象有关的干支内容.



图 13

这里不可能介绍郭沫若的重要研究的全部，只利用他得出的结论. 他综合了很多甲骨片，对于殷代的数字得出了如下结论：



图 14

一	二	三	亖	㐅	人	十	八	[illegible]	丨
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

[169]

其中，有时候把六写为⌒的形式. 这些数字的形状是怎样变化的？这是非常有意思的问题. 下面看李俨的《中国算学史》(1936 年，最近修订后于 1954 年再次出版）中的对照：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
周秦金文	一	二	三	亖	亖 㐅	介	十	八	九	十
许慎说文	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

图 15

第5节 命 数 法

1. 西方的命数法

我们使用着世界统一的命数法．由于人们不注意使用起来非常方便的命数法的缘故，因此，先介绍一点西方的命数法．

首先，在英语里，one，two，…，ten 以内的数的命数是可以的，如果从日本语的常识就不明白 eleven(11)和 twelve(12)的意思．thirteen（13）、fourteen（14）、fifteen（15）常常与 thirty（30）、forty(40)、fifty(50)的发音混淆．

德语中，从 1 到 20 还可以，从 ein-und-zwanzig(21)到 neun-und-neunzig(99)，是用颠倒顺序的读法来解决的．

西方人以 1 000(thousand)为单位读大的数．1 000 的 1 000 倍($10^3\times10^3$)读作 million，million 的 1 000 倍($10^3\times10^3\times10^3$)读作 milliard，milliard 的 1 000 倍($10^3\times10^3\times10^3\times10^3$)读作的 billion.

但 billion 的 1 000 倍不读作 billiard.（billiard 的意思是台球)，而是用 billiard 的 million 倍($10^{12}\times10^6$)来读作 trillion.

以上是英国和德国的习惯，它不同于美国和法国的命数习惯．在美国和法国的习惯中，million 的 1 000 倍($10^3\times10^3\times$
[170] 10^3)读作 billion．是英国和德国习惯的 1 000 分之 1.

虽然是相同的数，但英国和美国的读法却不相同．但是，我们都能够应用自如地表示任何大的数．

2. 现行的命数法

取亿兆等位制的研究在印度出现后经过中国传入了日本．

一 十 百 千 万 亿 兆 京 垓 秭 穰 沟 涧
[171] 正 载 极

图 16 和算书的大数和小数的说明.

古代中国没有确定的数以几位来进位的规定①. 宽永 4 年(1627 年),吉田光由在《尘劫记》中确定了万以上数以 4 位进位的法则.

万,十万,百万,千万,亿,十亿,百亿,千亿,兆,十兆,百兆,千兆,京,十京,百京,千京,垓,……

① 中国有确切的进位,万以下为 10 进. 万以上有 10 进、万万进和累进(万万为亿,亿亿为兆,……. 下面第 166 页～第 167 页有说明).

吉田光由以后的数学家中偶尔有使用其他进位方法的数学家，但人们统一使用 4 位进位法的结果没有出现过混乱. 应该说，这是吉田光由的巨大贡献.

中国汉代(大约公元 1 世纪)完成的徐岳的《数术记遗》中，有亿以上的数词. 日本的奈良朝时代，《数术记遗》和其他数学著作一道，从唐朝传入了日本. 现在尚不清楚亿以上的数词是否是从奈良朝时期开始在日本使用的，恐怕没有使用过那么大的数词.

日本的古代曾经没有文字，因此，以

一，二，三，四，五，六，七，八，九

作为基数，有

十，百，千，万

的四单位，可能是把这些数进行组合来表示数的.

二十，三十，百万，千万，八千万，八百万，千五百万

另外，当有端数①的情形下，多作三十余二.

奈良朝时代的最大的数的记录出现在稻子的束数，“四十万束”或“三十万束”等. 这可能是受到了中国的影响.

3. 古代中国的命数法

上面所述的《数术记遗》中说明了数的由来，说：“黄帝为法，数有十等. 及其用也，乃有三焉.”列举了前面介绍的从亿到载的
[172] 10 个数词，没有“极”.

“用”“有三”，是指进位方法有小乘、中乘、大乘三种. 所谓小乘是以十十变化，把十万称为亿，十亿称为兆，十兆称为京.

所谓中乘是指以万万变化. 万万为亿，万万亿为兆，万万兆为京. 就是八位进法.

所谓大乘是指达到极点时的数，万万为亿，亿亿为兆，兆兆为京.

---

① “端数”即零数.

前面所述的吉田光由的《尘劫记》中有下面的叙述：

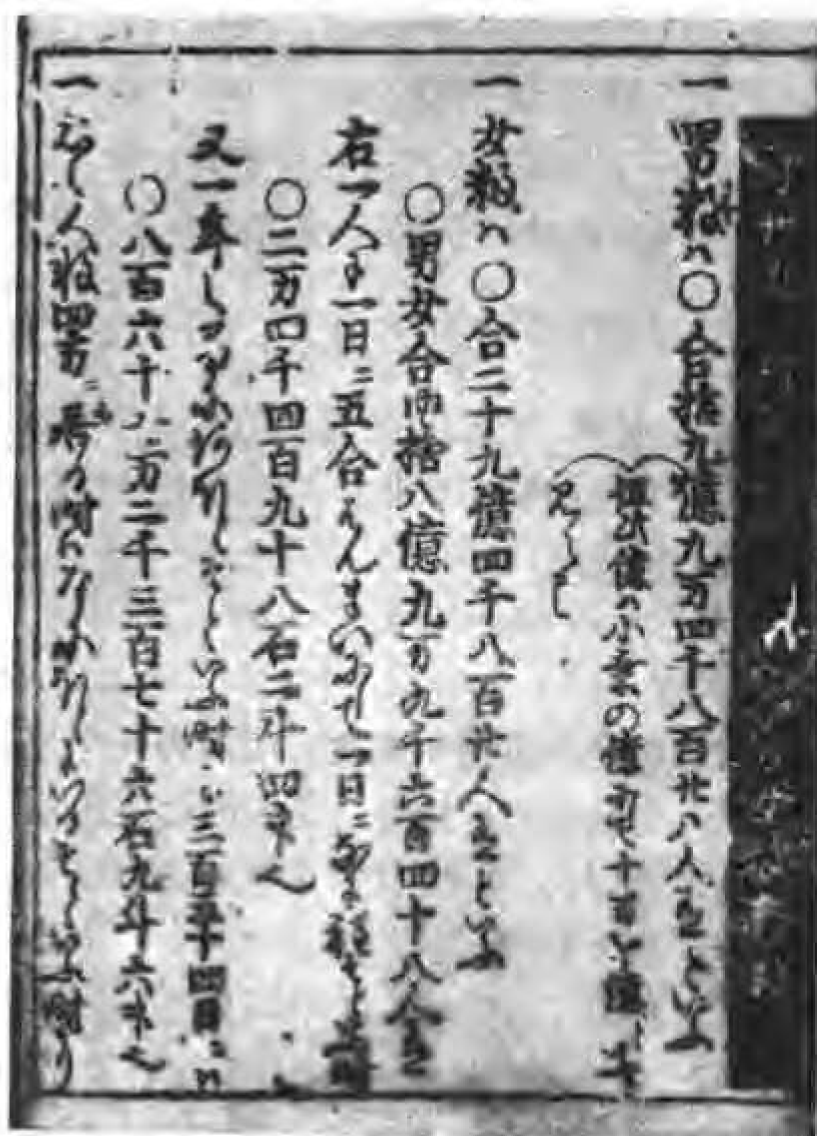


图 17

文政 2 年(1819 年)出版的石黑信由《算学钩致》中，有用中乘方法记录的数，这是少有的现象．计算用日本语的平假名的 [173]
47 个字能够作多少 17 个字的俳句①的问题后给出下面的答案：

二万六千六百四十七京九千三百六十五万零六百九十六兆二千一百九十三万四

千三百九十三亿二千二百一十九万二千六百八十七变

① 由五、七、五的个句共 17 音节组成的诗句．

这就是

万　京　万　兆　万　亿　万

47^{17} = 2 6647 9365 0696 2193 4393 2219 2687

穰　秭　垓　京　兆　亿　万

与现在的命数法(下面写的数)比较后会更好理解.

大乘到千万兆为止,与中乘是一致的.千万兆以后,中乘为京,而大乘为亿兆.

中乘:千万兆　京　十京　百京　…　千万京　垓…

大乘:千万兆　亿兆　十亿兆　百亿兆　…　千万亿兆　京…

因此,大乘的方法能够表示非常大的数字.但似乎没有怎么使用过,还没有见到实例.

4. 释迦的问答

如前所述,命数法在古代印度被发明后传入中国①,中国有三种命数法,但在古代印度曾经有过更多的命数法.

十进制法、百进制法、倍进制法、十百千进制法

在释迦的《华严经》中有这些方法.

在古代印度,把百千(100×1 000)叫做 koti. 100 个 koti 叫做 Ayuta,100 个 Ayuta 叫做 Niyuta. 对于这件事,当释迦的弟子向释迦问道"更大的数词中还有什么东西"时,释迦作了如下答复.我们这里回避困难的汉字,根据 Datta, History of Hindu
[174] Mathematics(1935 年)介绍.

100Koti = Ayuta,　100Ayuta = Niyuta,

100Niyuta = Kamkara,　100Kamkara = Vimbara

继续有:

Koti,	Ayuta,	Niyuta,	Kamkara,	Vimbara,
Aksobhya,	Vivaha,	Utsangas,	Bahula,	Nagabara,

① 主要是指大数,比兆还要大的数.

Titilambha, Vyavasthana-prajnapti, Hetuhila, Karaphu, Hetuindriha, Samaptalambha, Gananagati, Nivatadya, Mudra-bala, Sarva-bala, Visanijna-gati, Sarvasamjna, Vibhutangama, Tallakasana.

最后的 tallaksana 从 Koti 后位于第 24,即

$$1\ \text{Tallakasana} = 1\text{Koti} \times 100^{23} = 10^5 \times 100^{23} = 10^{51}$$

因此给出了一直到 10^{51} 的数位的名称.

《华严经》的第 45、65 卷中论述了倍进制法.

$$1\text{Koti} \times 1\text{Koti} = 1\text{Ayuta}$$

$$1\text{Ayuta} \times 1\text{Ayuta} = 1\text{Niyuta}$$

…… …… ……

这个进位方法能够匹敌中国的大乘法.

十百千进法为

sata(100)=dasa(10)×dasa(10)

sahaisa(1 000)=sata(10)×dasa(10)

dasa sahassa(100 000)=dasa sahassa×dasa

dasa sata sahassa(1 000 000)=sata sahassa dasa

koti(10 000 000)=dasa sata sahassa dasa

故

koti=十百千 dasa. [175]

用这个方法进行以下进位：

pakoti=十百千 koti

katippakoti=十百千 pakoti

…… …… …

这样,能够快速地写出极大的数.最大能够写出 10^{140},即 1 的后面连续写 140 个 0.

印度数词通过中国传到了日本.是前面所说的 10 个数的最后一个数“载”.到万载后数达到极点,所以,叫做“极”,但宽永 4 年的《尘劫记》中记述了“极”以后的更大的五个数词：

恒河沙,阿僧祇,那由他,不可思议,无量大数

这五个数词在日本曾经一般地使用过.但在《尘劫记》中,把万万极记为恒河沙、万万恒河沙记为阿僧祇,同时也有把万极记为恒河沙,万恒河沙记为阿僧祇的地方.另外,有无量大数当作一个数词的记法,有些地方也分别解释无量和大数这两个数词(请参见图16).

第6节 数学的语言

我们在日常生活中使用着的数学语言具有悠久历史和深刻含义.如,"算术"这个术语,它由来于中国汉代成书的《九章算
[176] 术》,实际上这个术语经历了2 000年的历史.又如,"数学"这个词,在中国的淳祐7年(1247年)秦九韶的著作《数学九章》[①]中已经开始使用了.

明治13年的时候,东京数学会社(这里的会社不是指商事会社,而是指学会.这个会社依次变成东京数学物理学会,日本数学物理学会,最后变为现在的日本数学学会)为了选定翻译语言成立了"译语会".那时候,日本迫切需要输入西方文化.在"译语会"的主要人物中想学习和算后再研究西方数学的大有人在.而且,在当时中国翻译出版了许多西方数学著作.因此,"译语会"的人们除直接读西方数学书以外,也利用翻译的中国数学著作,自然就受到中国术语的影响."译语会"经过几年的努力选定了翻译语言,为现在的数学术语打下了基础.其详细内容记录在《东京数学会杂志》.

下面将介绍我们不大注意的数学语言的由来.

---

① 《数学九章》这个叫法是明代(1368—1644)才出现的,原来叫《数术大略》.

1. 代数的语源

英语 Algebra 翻译为代数，但 Algebra 一点也没有包含"代数"这个词的意思. 据说，阿拉伯语的 Al-jebr 和波斯语的 Al-jabr 是 Algebra 的语源. 辞书中写到：

al = the

jabr = redintegration, consolidation, reunion of broken parts, reduction of fractions into integers.

即，有反复地擦掉和写的意思. 很偶然，江户时代给相当于代数的东西起了"点窜术"的名. 点表示做标记，窜表示擦掉（消掉）的意思. 故点窜术相当于 Algebra 的翻译.

那么，为什么把 Algebra 翻译成代数？这是从中国引进来的东西. 现在我们所使用着的代数这个词，最早出现在中国出版的《数学启蒙》[①]中. [177]

几年以后，把英国的德・莫根（De Morgan, 1806—1871）的 Elements of Algebra，经伟烈亚力（Alexander Wylie, 1815—1887）口述，李善兰（1809—1882）笔录，在上海出版了《代数学》十三卷（上海，1859 年）. 该书的序文中写到：

代数学，西名阿尔热巴拉，乃亚喇伯言，译即补足相消也. 很显然，李善兰把 Algebra 翻译成了代数学，伟烈亚力用英文说明了其理由：

The character which Algebra has now assumed in Europe, is of such a totally different cast from what it was two centuries back, that it may be looked upon as a new science; and it has been thought advisable, instead of using the old name Tseay kan fang 借根法, to give it a new designation more in accordance with its altered aspect; the term 代数学 Tae soo heo

① 《数学启蒙》伟烈亚力自序（1853 年）中有"代数微分"之语，"代数"应为 algebra 之翻译.

"Substitutionary arithmetic" has been adopted accordingly

即,从1859年的200年以前,在欧洲被认为是新科学的Algebra的特征发生了变化.用Substitutionary arithmetic意义上的"代数学"来代替旧名称"借根法"更为合适了.这就是代数学这个词的开始.

因此,传入中国的Algebra被叫做阿尔热巴拉、阿尔热巴达,也有"借根法"的名称.所谓借根法是借未知数x的方法,它有Algebra的意思.可是在上面的英文引文中说,由于"借根法"陈旧的缘故,所以,采用新的"代数学"的名称.

李善兰的《代数学》十三卷,在明治初年传到日本后,"代数学"被使用在以下书中:

[178] 本明毅,《笔算训蒙》,明治2年刊

福田利轩,《笔算通书》,明治4年刊

岸俊雄,《西洋算法比例法》,明治4年刊.

这种用"代数学"作为书名的数学著作陆续被出版了,如,

今村谦吉,《代数学阶梯》,明治4年刊

柳泽退藏翻译,《代数学启蒙》,明治5年刊.

2. 几何的语源

Geometry作为几何学翻译的最早的书是《几何原本》万历35年(1607年).该书是Euclid, Elements of Geometry的前半部分的翻译①.欧几里得的《Elements of Geometry》是由13卷构成的,印刷术发明后,作为最早的数学著作于1482年出版后,出现了多种版本,因此,还不能判断是哪一种版本,但能够推断为底本的是克拉维乌斯(Clavius,1537—1612)的订正本.

是由克拉维乌斯的弟子,最早被派遣到东洋的传教士利玛窦口述,上海人徐光启(1562—1633)笔录而翻译了《几何原本》.

---

① 是指译成中文,当时仅译出前6卷.

利玛窦(Matteo Ricci,1552—1610)是意大利的传教士,他认识到在中国传教时数学和天文学的重要性. 万历 10 年(1582 年)来到中国的广东省以后,以出版世界地图为开头,留下了数学、天文学和测量学等方面的很多著作,万历 38 年(1610 年)在北京去世.



图 18 利玛窦像.

对于为什么把 Geometry 翻译为"几何"的问题,没有任何说明. 因为中国人"几何"的发音为 kiho,因此,有人认为几何是根据
Geometry 的头几个字母 Geo 音译而来的. 正如在《几何原本》的序 [179]
文中徐光启所说的"几何原本者,度数之宗"那样,一般地 Geometry 被认为度数之学. 此外,几何学只有与图形有关,由于中国人不明白几何的意思,因而后来使用了"形学"这个词. 其后很晚出

现《形学备旨》(1884 年)和《形学补编》(1889 年). 由于只与图形有关的缘故，也许“形学”是 Geometry 的最恰当的翻译.

我们不清楚《几何原本》是在江户时代的什么时候传到了日本. 日本最早使用几何这个词，可能是柴田清亮的《几何学首》(明治 6 年，1873 年，中村正直序). 几年以后，“译语会”作出决定后，“几何学”这个词开始被普遍使用了.

关于代数和几何，《林鹤一博士和算研究记录》(1937 年)下卷第 399 页～417 页的《关于几何和代数语源》中有详细介绍.

3. 方程

从英语单词 equation 不可能翻译出方程的意思. 实际上，中国人 2000 年以前就开始使用方程这个古老的词.

[180] 大约在公元 100 年左右完成的中国最早的数学著作《九章算术》[①]，正如其名，由方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九章组成.

方田是测量平面图形的面积问题；粟米是与交易买卖有关的问题；衰分是级数问题；少广与方田相反，是在已知面积的情况下，去求平面图形的长、宽和周长的问题. 商功与土木工程有关，是处理立体体积问题；均输是与运输粮食、货币有关的问题；盈不足是与分配有关的问题，最后的勾股与直角三角形有关，其根本是毕达哥拉斯定理[②].

余下的方程则是联立一次方程组问题. 不把二次以上的方程叫做方程，而叫做开方式.

《九章算术》中有“方程，以御错，糅正负”. 错有紊乱交错之意，整理这些交错，调和正负来解决问题，《九章算术》中有 18 道这样的问题. 方程的程是课程的程，有分摊的意思. 因此，方程这

---

① 关于《九章算术》的成书年，可能要早到公元前 100 多年.

② 中国称为勾股定理.

个词与英语中的 equation 毫无关系，但《九章算术》中的18问，和现在的联立方程组的解法完全相同，所以，日本数学会社的“译语会”作出使用“方程”这个译语的规定.



图 19 《九章算术》.

下面举《九章算术》中最简单的一个问题：

今有牛五羊二，直金十两，牛二羊五，直金八两，问牛羊各直金几何？

这个问题的解法用文字叙述如下： [181]

更置牛十，羊四，直金二十两；又牛十，羊二十五，直金四十两. 牛数相同，金多二十两者，羊差二十一使之然也.

今设牛为 x 头，羊为 y 只，则

$$5x+2y=10,$$

$$2x+5y=8.$$

用2乘第一式，用5乘第二式，则

$$10x+4y=20,$$

$$10x + 25y = 40.$$

上面的术文正说明了这一过程."羊差二十一使之然也",两个方程相减后得

$$21y = 20.$$

《九章算术》中没有写出方程组的形式,而用文字论述的精神和现在的方程组的解法完全相同.其中,也论述了世界上最早的正负的概念.

4. 商、实、法

这是算盘上使用的术语[1],商是除(乘)后得的答案,实是被除(乘)的数,法是除(乘)数.大概这也是辞典不能解决的问题吧.翻开辞典查的结果,商有"由外知内"、"阐明"和"测量"等意思.实是果实的实的意思.法有尺度的意思.仅仅这些作为数学术语还是有些心中无底.

将立方体(图 20)按纵、横、平面切割时,被分成イ、ロ、ハ、
[182] ニ(见不到的部分)的 8 个部分.给它们起了名:イ为隅、ロ为平廉、ハ为长廉、ニ为方,这样,把原来的立方体叫做实.

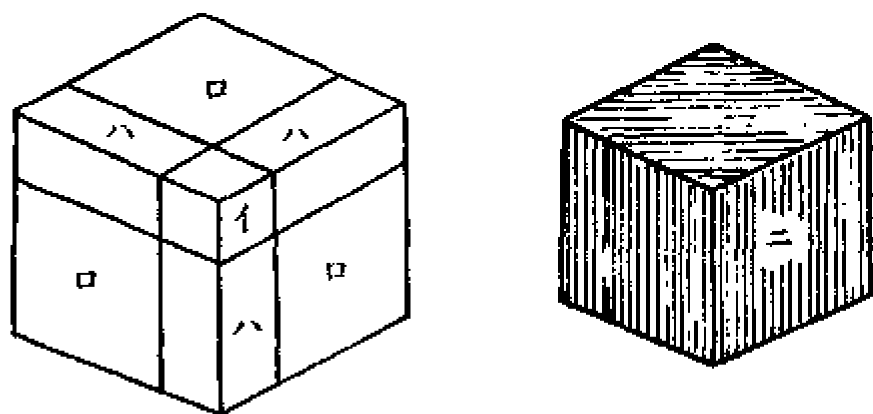


图 20

---

[1] "商、实、法"术语,"商"用于除法,有商量的意思,而乘法叫"积",不叫"商".中国自古就有,不限于算盘,可能是日本这样称呼."实"是分母,也是常数项,"法"是分子.

这个就被演变成用算筹和算盘解答方程组时的次数的名称.(请参照第6章第2节之3"算筹与算盘".)

实(常数项),方(1次项),廉(2次项),隅(3次项),三乘(4次项),四乘(5次项),……

于是,当1次方程组时,只有实和方,实是被除数,方是除数.原来写成方,但不知何时写为法了.

商、实、法也是有2 000年历史的数学术语.

第7节[①] 义经关于小孩的问答

源义经到乡下时,看到某一家里有很多小孩,他便问究竟有多少小孩.这是非常有名的话题. [183]

1.《算法童子问》中的问题

这个话题的根据不清楚,数学书中有两种不同的流传形式.首先,介绍村井中渐于天明4年(1784年)写的《算法童子问》的全文. [186]

"父之子,母之子问题.

古时候,九郎判官殿去镰仓时,到了叫大矶的民家休憩.

见家中有多童子,故问弁庆共有小孩多少时,母答曰:父之子有七人,母之子有五人,合计共有八人.

弁庆闻之,若有七人和五人,那么,应共有十二人才是.曰有八人有误,追问究竟.

判官殿笑曰:曰有八人,必有缘由.应有既不是父之子又不

① 原著的第七节为根据日本国不同地区的发音和不同行业的特点编写的账簿,翻译后没有任何意思,故没有翻译,用第八节代替第七节.此外,原著的第三章第九节为翻译后意义不大,故没有翻译,用第十节的序号变为第八节.

是母之子的童子.

评曰：有三个孩子的男人娶有一个小孩的女子，后又生了四个孩子.

开始的男子有三个小孩，又生四个小孩，故父有七个小孩. 该女子带来一个小孩，又生四个小孩，故母有五个小孩. 男子原来的三个小孩不是母之子，女子原来一个小孩不是父之子. 故，正如母之答.”

用图解(图 21)来表示该问答如下，再没有必要说明了.

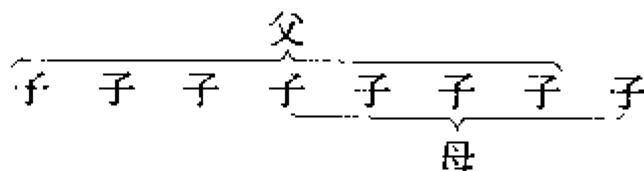


图 21

[187] 这个问题在明治 12 年出版的福田理轩编辑的《算法玉手箱》中也被收录，但改变了孩子的数和故事情节.

2.《算法玉手箱》中的问题

《算法玉手箱》是长宽分别为 13 厘米和 9 厘米的微型书，与其说是明治时期的数学游戏书，倒不如说是具有故事风格的启蒙教育的数学书籍. 上卷提出问题，下卷回答问题. 作者福田理轩是现在的顺天高中的创始人.

《算法玉手箱》中的全文如下：

“源之义经，离开京都，带弁庆，向北国的山边去，进茶舍小憩时，见男女小孩九人团坐在一起玩，便问茶舍老婆. 她说：这些小孩中有我的小孩，还有老爷的小孩，老爷和拙婆都有男孩六人，女孩一人. 义经听完便走出了家门.

过少刻后，弁庆问义经说：据方才老婆的回答，老爷有男孩六人和女孩一人，同时老婆也有男孩六人和女孩一人，但男女小孩才共有九人. 这是为什么？义经的回答在下卷.”

[上卷的回答]“义经曰：先老爷有男孩二人，后老婆带着男

孩二人与老爷再婚,又生了四男一女."

男 男 男 男 男 男 女 男 男

图 22

关于这个故事,还有下面的话题:

"有一老翁.到某一官邸正门前,守门的人出来问道:是什么人?老翁说:我没有兄弟姐妹,你主人的父亲的父亲,是我的父亲.守门人向主人通报老翁的话,主人立即出门迎接,握着老翁的手,请到了后堂.问老翁是什么人?答案在下卷."

[上卷答案]"主人的父亲."

最后的这个故事,在明治以前的文献还没有见到.《算法玉手箱》受了西方数学著作的影响,因此这里回避对于这个问题是日本固有的还是从西方传进来的问题作出判断. [188]

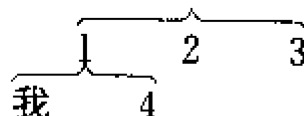
3. 西方的物语

和上面的故事非常类似的故事,在很早以前就在法国流传.其一为,Ernest Legouvé(1807—1903)的戏剧中有这种题材的故事.

法国数学家 G. Brunel 于 1894 年在法国《自然科学》杂志上发表了各种各样的具体例子.这里就介绍这个例题.1894 年相当于明治 12 年,因此,前面介绍的《算法玉手箱》要比法国的早一些.

(a)"我伯父的兄弟,是我兄弟的伯父."

用下面的方式可以写出这个家族系统:



1 是我的父亲,2 是我的伯父,3 是伯父的兄弟,4 是我的兄弟,那么,这段文字表示了 3 和 4 的关系.

(b)"我外甥有一个伯父.这个伯父是我祖父的孙子."

外甥的伯父是我自己.这个我自己就是祖父的孙子.

(c)“我外甥中有我祖父的儿子所处家的伯父.”

这是一个非常麻烦的问题.

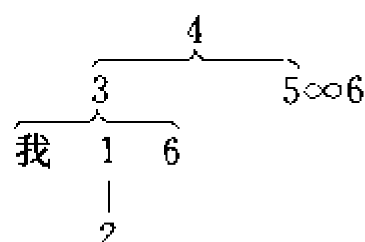


图 23

我的兄弟 1 的儿子 2 是我的外甥.父亲 3 的父亲 4 的儿子 5 是我的伯父,但这伯父 5 是 2 的伯父.因此,5 必须是与我的妹妹 6 结婚的那个人.这个问题就是 2 和 5 的关系.

[189] (d)“我祖父的伯父是我伯父的祖父.”

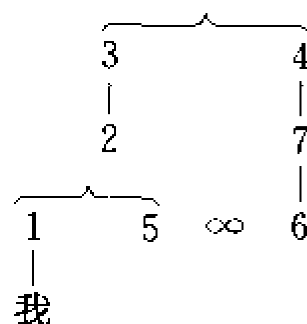


图 24

我的祖父 2 的伯父是 4,6 是和我的伯父 5 结婚的伯母,她的祖父是 4.(原文法语中没有区分伯父和伯母,这样更难理解这个关系.)

(e)“我伯父中的有人的外甥是也是我的外甥.”

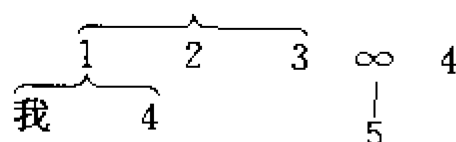


图 25

我兄弟 4 与伯母 3 结婚后生了 5,5 是我的外甥,同时也是

[190] 我伯父 2 的外甥.

第8节 数学的名言

1. 欧几里得和柏拉图

公元前300年左右的数学家欧几里得(Euclid)为我们建立了伟大的欧几里得几何学体系. 至今还流传着国王和欧几里得对话的传说. 国王问道:"学习几何学有什么捷径?"欧几里得坦率地回答说:

"几何学没有王道."

但这里的几何学未必是欧几里得几何学本身. 当时的希腊学问具有秩序井然地思考问题的习惯. 因此, 以几何化的方式去思考问题. 只有几何化才能够解释无理数的存在. 他们根据右边的图形(26)想出下面的公式:

$$1+3+5+7+9=5^2.$$

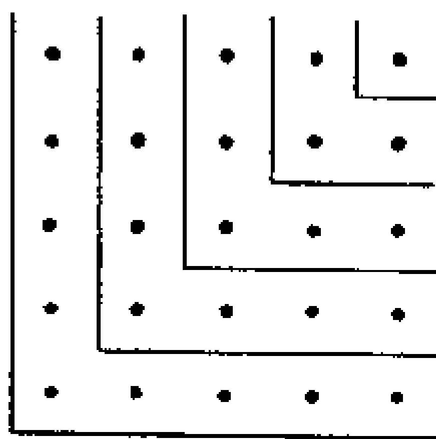


图 26

在这种精神下, 柏拉图在自己学园的门牌上写上:"不懂几何学者, 不得入内."

[193]

"神早已把万物几何化了", 这是柏拉图哲学的根本思考方法.

他们把数人格化以后, 探索出了完全数、亲和数和圣数.

$$1+2+3=6, 1+2+4+7+14=28.$$

这样的约数之和等于其本身的数叫做完全数. 现在完全数在理论上被计算出如下数:

6, 28, 496, 8 128, 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328,

2 305 843 008 139 952 128

2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176

(接着有 54 位、64 位、77 位数).

另外还有

$$\begin{cases}1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284\\1+2+4+71+142=220\end{cases}$$

这样，220 的约数之和为 284，而 284 的约数之和为 220. 把这样的一组数叫做亲和数. 理论上也可以计算出下面的亲和数：

$$\begin{cases}18\ 416\\17\ 296\end{cases}\qquad\begin{cases}9\ 437\ 056\\9\ 363\ 584\end{cases}$$

毕达哥拉斯学派，把 36 叫做圣数. 这是因为有如下性质：

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36, 36=2\times3\times6,$$

$$(1+2+3)^2=36=(1\times2\times3)^2,$$

$$1^3+2^3+3^3=1^2\times2^2\times3^2=36,$$

$$1+2+3+4+\cdots+36=666,$$

$$1+3+5+7+9+11=36.$$

[194] 三角形数中，成平方的数为 36，36 的约数和为

$$1+2+3+4+6+9+12+18=55,$$

这个 55 也是三角数.

2. 高斯

如果说近代数学之母是欧拉(Euler，1707—1783)的话，那么数学之父应该是高斯(Gauss，1777—1855). 高斯进一步严格化了数学，并认为一切自然科学是数学. 他说：

"数学是科学的皇后."

3. 莱布尼兹

用与牛顿完全不同的方法发现微积分的莱布尼兹(Leibniz，1646—1716)是哲学家、政治家. 他在百忙之中度过了一生. 他虽然没有能够把自己的思想系统化，但他设想了逻辑的符号化. 他是尝试把思想进行计算化的第一人. 直到后来罗素实现了

这个设想，并建立了符号逻辑学. 莱布尼兹说：

“数学是人类智慧的光荣.”

这是他对数学的最高赞美诗.

4. 康德

康德(Kant，1724 -1804)综合了他以前的所有哲学思想，思索，再思索，最后说了一句“这样太好了”，便离开了人世. 他在《纯粹理性批判》中试图证明确立数学和数学性的自然科学的基础. 他说： [195]

“自然科学只有数学的形式才称得上是科学.”

5. 拿破仑

一代著名将军，同时也是读书家的拿破仑(Napoleon)说过：

“数学的进步和改善，是国家繁荣昌盛的关键.”

6. 笛卡儿

著名的解析几何学的发现者笛卡儿(Descartes，1596-1650)，曾经为如何发现真理和真理的方法而苦苦追求. 23 岁时参军，也许他在军营中发现的解析几何学也是发现真理的一种方法吧. 他怀疑一切. 怀疑，再怀疑. 最后，也怀疑自己的存在，便留下了名言：

“我思故我在.”

他在《哲学原理》中，有“怀疑数学的论证”的一章内容. 但他却在《方法论》中说：“我最喜欢数学. 因为它的理论是确实明了的.”他的方法论完全求助于几何学. 他说：

“我们的物理学一切都是几何学的.”

7. 孔德

法国哲学家孔德(Comte，1798—1857)，曾经是出类拔萃的

数学家.他的实证哲学认为,社会历史的本质,和数学一样必须是从根基得到证明.一切学问,必须有由单纯到复杂的过程.他

[196] 说:

"科学的教育,如果不是从数学开始,其基础必将出现缺陷."

8. 德·摩根

近代数学教育家,具有卓著成就的德·摩根(De Morgan,1806—1871),也有同样的见解.他说:

"精密科学的两只眼是数学和逻辑."

9. 关孝和

日本国"和算"鼻祖关孝和(1642? —1708)的弟子建部贤弘(1664—1739)把自己老师的著作进行注解,写《发微算法演段谚解》时,在跋文中的话,使人们受到教诲.



[197] 图 27 关孝和数学名言.

“算学何为乎.学难题易题,尽无不明之术也.虽说理高尚解术,迂阔者乃算学之异端也.”

实际上,关孝和在理论方面非常出色,但在他的著作中也表现出了杰出的计算技巧.

10. 久留岛义太

没有一个老师,也没有什么著作的久留岛义太(? —1757)是世界数学史上的一个奇才.在他的眼里除酒和数学以外什么都没有.享保15年(1730年),被九州延冈的城主—— 内藤政树聘请当了算学教师.回江户时用已经写好的原稿糊了藤箱了,因此,他想出的问题通过其弟子的笔记传下来一些,我们所知道的仅此而已.他在欧拉以前就达到了欧拉函数思想.他用初等方法推导出了求和的一般公式

$$1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p,$$

我们不可能很快就明白他的方法.他曾经说过:

“设算法题为难,实施术次之.”

如疾风掌握问题,如疾风解开问题而离去,的确给人一种古今独步的感觉.

他才是名副其实的天才.

11. 培根

英国近代哲学鼻祖弗·培根(Francis Bacon,1561—1626)说过:

“历史让人贤明;诗让人机智;数学让人精细;自然哲学让人深思;伦理学让人谨慎;逻辑学和修辞学让人获得争论.”

他又说:

“正如眼睛享受光明、耳朵聆听音乐而喜悦那样,人的心从事自然的神秘的工作、发现变化和美而喜悦.” [198]

12. 牛顿

微积分的创始人、物理学的泰斗牛顿(Sir Isaac Newton，1642—1727)的名言是："我在海滩上，就像小孩一样，能找到美丽的卵石，但却从来没有发现真理的汪洋大海."

诗人泡普(A. Pope)赞扬牛顿说：

"自然和自然的法则被隐藏在黑暗中.神说：牛顿诞生了，一切被光明照耀了."

13. 开尔文

近代电学的开拓者开尔文(Lord Kelvin，1824—1907)说过：

"数学是难解的，也是难以取悦的，与常识不相容的，不能想
[199] 象的东西.数学是被精华了的常识."

14. 麦克斯韦

开拓电工学基础的麦克斯韦(James Clerk Maxwell，1831—1879)，对于物理学的研究态度提出了如下忠告：

"不采用物理学的理论而想获得物理概念，必须接近与物理类似的存在.物理类似，意味着一种科学和其他科学具有类似的部分.这就起到相互说明其他东西的作用.

总之，一切数学的科学，其立足点在于物理法则和数的法则的相互关系之上.因此，精密科学的目的是，根据数的作用，把自然界的问题归结到量的规定."

麦克斯韦在少年时代就提出了关于卵形线的数学论文，震惊学术界，受到了人们的肯定.

15. 霍布斯

尊重数学的英国中世纪的自然主义哲学家霍布斯(Hobbes，1588—1679)说过：

"几何学是神馈赠给人类最满意的唯一的科学." [200]

16. 西尔维斯特

数学和音乐的共同性被人们经常议论,英国数学家西尔维斯特(J. J. Sylvester,1814—1897),在1864年的论文中指出:

"音乐是感觉的数学,数学是理性的音乐."

他又说:"正因为这样,音乐家感觉数学,数学家思考音乐.音乐是梦想,数学是活生生的生命.在各自的完善过程中相互依存."

17. 爱因斯坦

历史已经证明,学问受到阻碍时回到古典是通常的原则.相对论的完成者,现代科学的最伟大的成功者爱因斯坦(Einstein)说过:

"我们尊敬古代希腊科学是近代科学的发生地.希腊产生了不能一步一步怀疑的理论体系.我们把它的原因归功于欧几里得几何学.对于欧几里得几何学建立后的科学成就,坚定了人类智慧的信念."

爱因斯坦又说:

"如果,欧几里得没有能够点燃他自己的热情之火的话,他也不可能成为科学家."

18. 艺术和数学

(i) 过了30岁,成为有名的法律学者以后,立志于数学,并建立了近代严密数学的外尔斯特拉斯(Weierstrass)说: [201]

"没有多少诗人天赋的数学家,不能说是完全的数学家."

(ii) 美国诗人,评论家爱默森(Emerson)说:

"单纯的诗人的诗句,不是最善的.同时,单纯的数学家的问题也不是最善的.但如果他们理解了事物的几何学基础,知晓了

它的光彩，他的诗会更加优美，他的数学问题会拥有音乐的那种美."

(iii) 被誉为在数学和物理方面世界第一人的庞加莱(Poincare)说：

"数学在美的方面也有价值.数学上造诣深的人们，能够从数学中欣赏到与美术、音乐相同的快乐.科学家是必要的，但他们并不是单纯研究自然的.因为自然让科学家快乐，所以，他们才研究它.如果自然不是美的，那么，也没有认识自然的价值了.而且从中也产生不了价值.这里所说的美，既不是情感方面的美，也不是外观的美.而是纯粹的智力知觉面感受到的秩序和谐的精练的美."

(iv) 哲学家、数学家和社会评论家罗素(Bertrand Russell)说：

"数学是极度纯粹的，而且它具有最伟大的艺术才能显示出的那种冷冰冰的严肃的美.真实的喜悦的精神，精神上的发扬，超人的感觉能够在诗歌里得到，同样也能在数学里得到."

19. 真理和数学

数学是探索真理的科学，正因为有了数学，真理才被确实地掌握，那么真理是什么呢？罗素直率地说：

"不能把真的命题说是假的.真是真，假是假，除此之外，没
[202] 有其他说明的途径.真和假的存在，恰如红色和白色的存在.不能分析红色和白色的关系.故正确判断时，只要掌握真理就可以了.教给红色时，除让看红色的花，红色的书，红色的球以外没有其他手段."

20. 数学家的心境

关孝和的弟子建部贤弘，发现了能够与西方微积分媲美的圆理.他写了《缀术算经》(享保 7 年，1722 年)，论述了圆理的方

法,并献给了将军吉宗.当时他58岁.在这本书的跋文中,他写了发现圆理的心理体验:

"从算数之心则心境泰然,不从则苦痛.所谓从为必得肯定其事未会理以前之事而心无疑事,心境泰然之事.心境泰然,故常为不止,常为不止,故无不得成也.所谓不从,其事未会以前,不料可得与不可得而疑惑,故苦痛.苦痛,故得成难.

吾以算为学,欲常安行,苦于算法已久,盖是尚不尽自己之质,已徐徐六旬之际,得识生得本质之鲁钝,会从算法之心.

凡算以从己(自然)容于自心时,有知与未知之分,故从者从我,不从者不从于我.以自己无聊怍,当容于咸算时,自心与道混一,知之事亦从我.未知之事亦从我." [203]

第4章　图形Ⅰ

第1节　拼 图 问 题

1. 两个故事

西方有一个古老而有名的故事.

在航海中,船底出现了边长为13和5的长方形的口($13\times5=65$).但在船上只预备了边长为8的正方形板子.聪明的船长用64平方米的板子巧妙地缝合了65平方米的口.

有下面的两种缝合方法(如图1),这里不详细说明了.

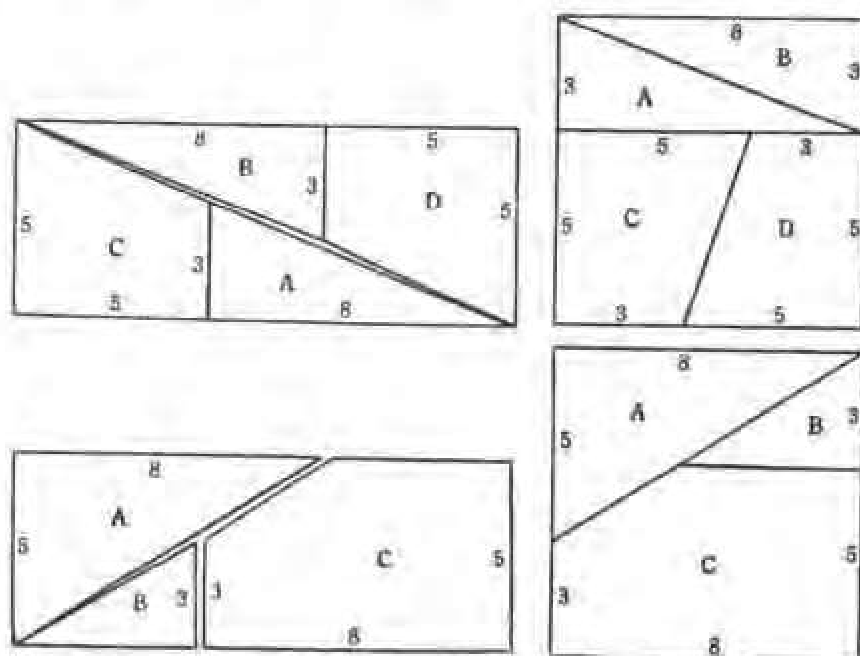


图1

日本也有类似的问题.对于航海中的船只来说木板是相当重要的、古代日本人,非常重视布条.于是出现了“猩猩火”①问题.所谓“猩猩火”就是绯红布条的问题.

万治2年(1659年)山田重正写的《改算记》中,有下面的问题:

“猩猩红,宽三尺二寸,长五尺.将此矩形改成正方形时,要求不分割细小部分.如何改成边长为四尺四寸的正方形.不管如何调整都具有相同的中心.”

如图2,将宽为3尺2寸,长为5尺的布用一刀割成两部分,然后,把它们合并后就得到正方形.

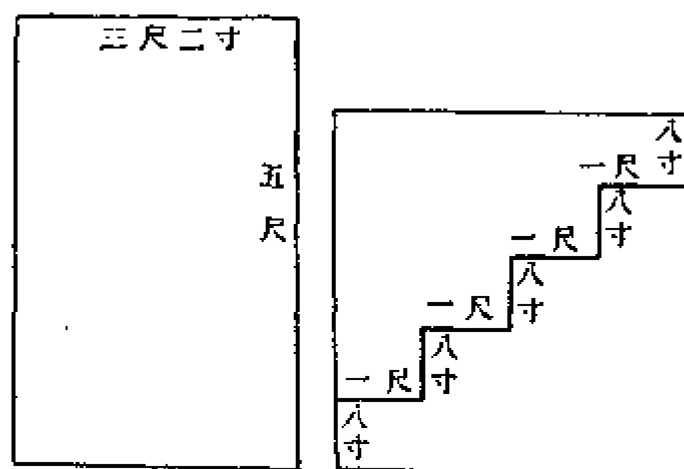


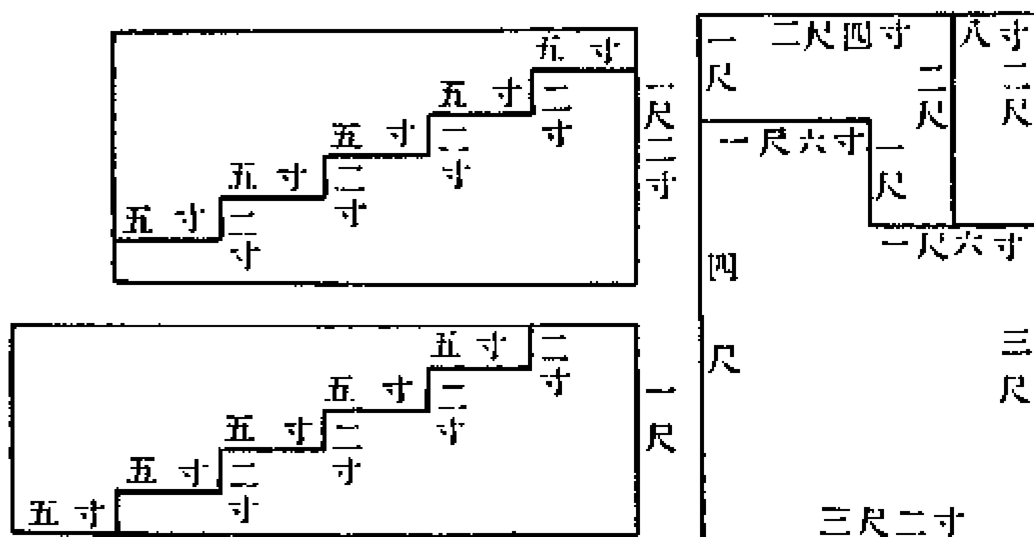
图 2

此外,还介绍了宽1尺2寸,长2尺5寸的布改为宽1尺,长3尺的方法.又介绍了把上述宽3尺2寸,长5尺的布分割为3部分后改为正方形的方法.如图3.

然而在《改算记》前2年出版的藤冈茂之《算元记》(明历3年,1657年)中,介绍了这个问题的最简单情形.这是日本拼图问题的最早的文献.原文如下:

“长方形织物改成正方形的问题.

① 猩猩火:从西方国家传入日本的一种罗纱.



[205] 图 3

问：长八尺，宽二尺五寸五分的织物，用一刀分成两部分，改为正方形.

答曰：长除以三，再乘以二得五尺三寸三三. 又将宽除以二，再加到宽上，得五尺三寸二分 5 厘. 能够缝合成正方形. 这里有小的误差，应注意没有误差为好."

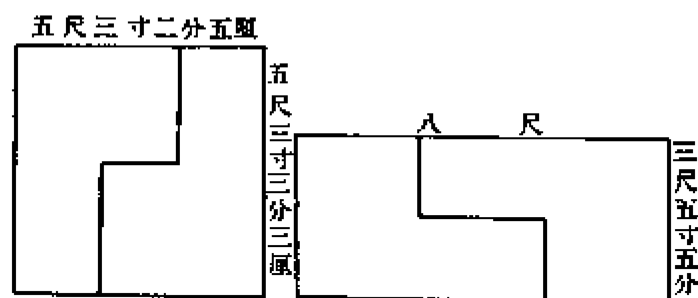


图 4

这里的拼图有些是正确的，所以避免了出现小量误差. 最初介绍的《改算记》的问题中，设最初的长方形的两边为 a，b，被合并后长方形的两边为 a'，b'，那么

$$\frac{a}{a-a'}=\frac{b'}{b'-b}=\text{整数}.$$

但有限定条件 $ab=a'b'$，$a>a'$，$b<b'$.

在最先介绍的缝合船底的问题中，下面关系式成立：

$$5\times 13-8\times 8=1.$$

与此同样的关系式有：

$$13\times 34-21\times 21=1,$$
$$34\times 89-55\times 55=1,$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

还有

$$5\times 5-3\times 8=1,$$
$$13\times 13-8\times 21=1,$$
$$34\times 34-21\times 55=1,$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

对这些关系式的一般解的研究能够得出连分数论①. [206]

当长方形的两边(1,4),(4,9),(16,25),(25,36),…等情形时,能够用锯齿形切开,合并成正方形,但是,当长方形的两边为(9,25)时,用锯齿形切开再合并就得不到正方形,把这个题目当作遗留问题供读者思考.

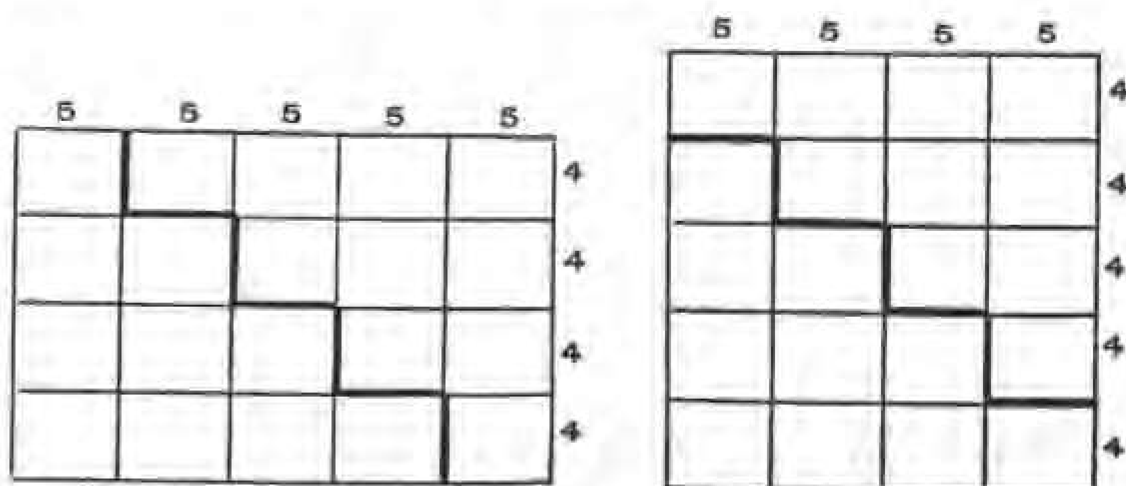
2. 中国的文献

与此类似的问题,很早以前在中国文献中就出现了.那就是《测量全义》.《测量全义》是最早把古希腊阿基米德的学术传播到东方的著作,我还没有掌握确凿的证据来明确说明其作者是谁.但是有"徐光启笔受"的疑问,徐光启系上海人,那时向来到中国的传教士利玛窦(1553—1610)、罗雅谷(1593—1638)等学习了西方学术.利玛窦于1610年去世,但《测量全义》是1631年完成的,可能罗雅谷为这本书付出了更多的劳动②.利玛窦是最早来到中国的意大利传教士,当时的传教士给中国人介绍了西

① 这里出现的3,5,8,13,…为斐波那契级数是非常有趣的情况.

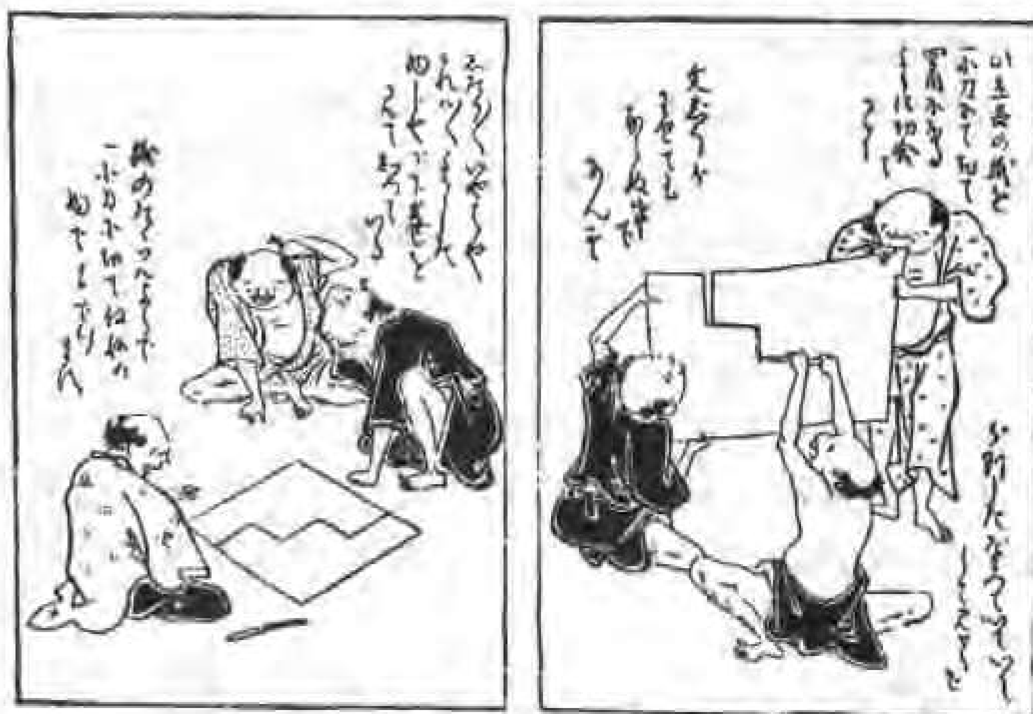
② 徐光启是读书的"督修",相当于主编,译者为罗雅谷,与利玛窦无关.

方的天文学和数学.《测量全义》是其中的一个,该书在没有给出任何说明的情况下附加了下面的图(图 5).即把边长为 25 和 16 的长方形的布,改为边长为 20 的正方形.



[207] 图 5

利玛窦去世后,1631 年出版了《测量全义》,当时的日本正处于宽永时期的闭门锁国状态,严格限制中国书籍的传入,因此,没有证据表明《算元记》和《改算记》的作者看到过《测量全



[208] 图 6 引自《环中仙》"和国智慧较"

义》. 过了 50 年以后《测量全义》确实传到了日本.

在《改算记》中有铁炮的弹道问题,这说明了作者山田正重确实掌握了西方的知识. 因此,缝合问题也许受了西方或中国影响.

3. 中根彦循的问题

100 年以后,《算元记》和《改算记》中的这些问题几乎都被学术性地解决了. 这被收于中根彦循(1701—1761)的《堪者御伽双纸》(宽保三年,1743 年)中. 在西方,法国人蒙丢克拉(Montucla,1725—1799)研究过这个问题. 1778 年蒙丢克拉证明了一般性结论,因此,中根的解决比西方早 35 年.

首先,从结论开始论述. 从中根所掌握的资料看,任何一个长方形分割再合并后都能够作出正方形. 遗憾的是没有论述一般情况,但中根给出的每一个问题都是颇有趣味性的,这里将论述这些问题.

(1) 是把相等的两个正方形合并在一起,然后把它进行分割,要作一个正方形. 如图 7(1).

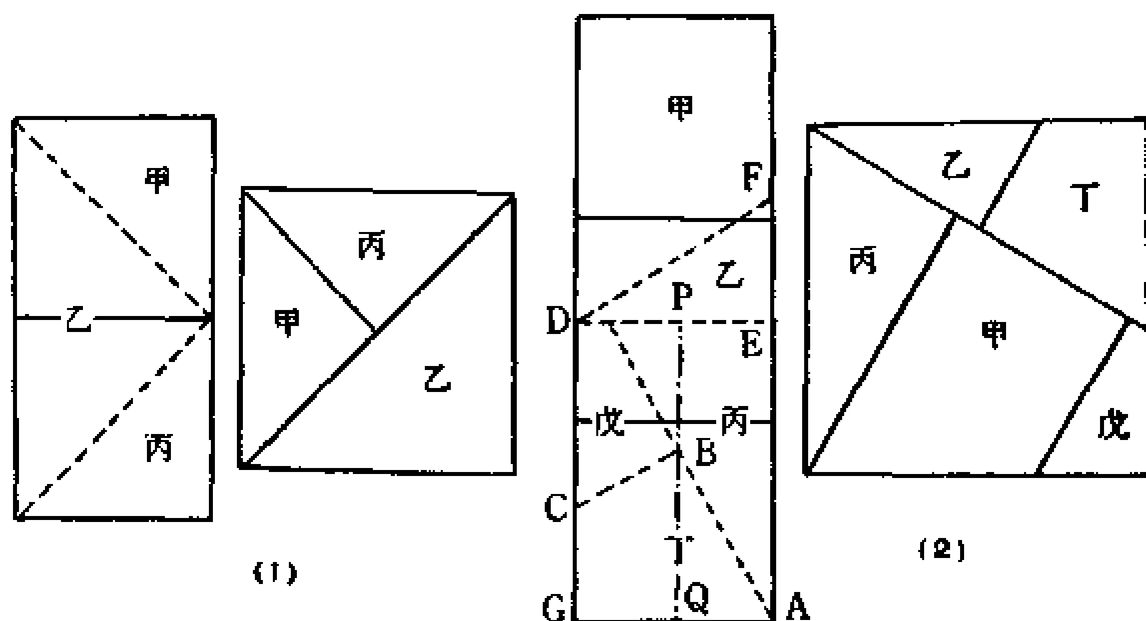


图 7

(2) 是纵向排列三个相等的正方形. 首先决定横向的中央
[209] 线 DE. 其次,确定纵向的中央线 PQ. 在其上取 B 点,使得 AB 等于正方形的一边的长度 AG. 从 B 点作 AB 的垂线,确定 C 点. 再取 $GC=EF$,联结点线,分割成甲乙丙丁戊五个部分,这样,能够作一个正方形(如图 7(2)).

(3) 把三个正方形以钥匙形式并列,把它分割成一个正方形. 原文如下:

“将丑、寅的尺寸折成四个部分, 如图 8 所示. 首先, 剪下甲, 又折出子丑的尺寸为四个部分, 如图 8 沿折线作虚线, 将折线和子丑的角三处与曲尺重叠在一起, 如图分割, 就成为如图 8.”

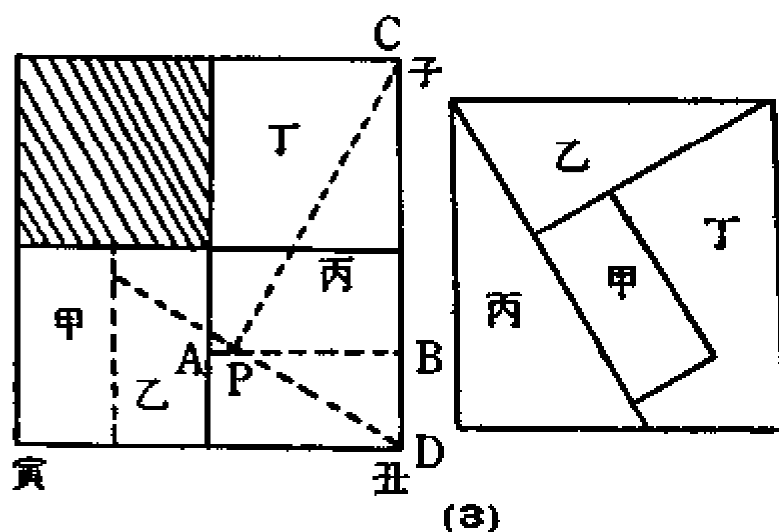


图 8

即,把一边折成四个部分,把甲分割掉. 又把 DC 折成四个部分,并作 AB 线,其上取点 P,作直角 CPD. (古代不使用圆规,用木匠的曲尺来作直角)这样按图上所示那样分割合并就可
[210] 以了.

图 9(4),(5),(6)是把相同的五个正方形并列在一起,分割并合并成正方形. 在(4)中,A,B 分别是各边的中点. 除此之外,再没有必要说明什么了.

关于这方面，分别再列举说明把 6 个、7 个、8 个、10 个正方形并列的情形.

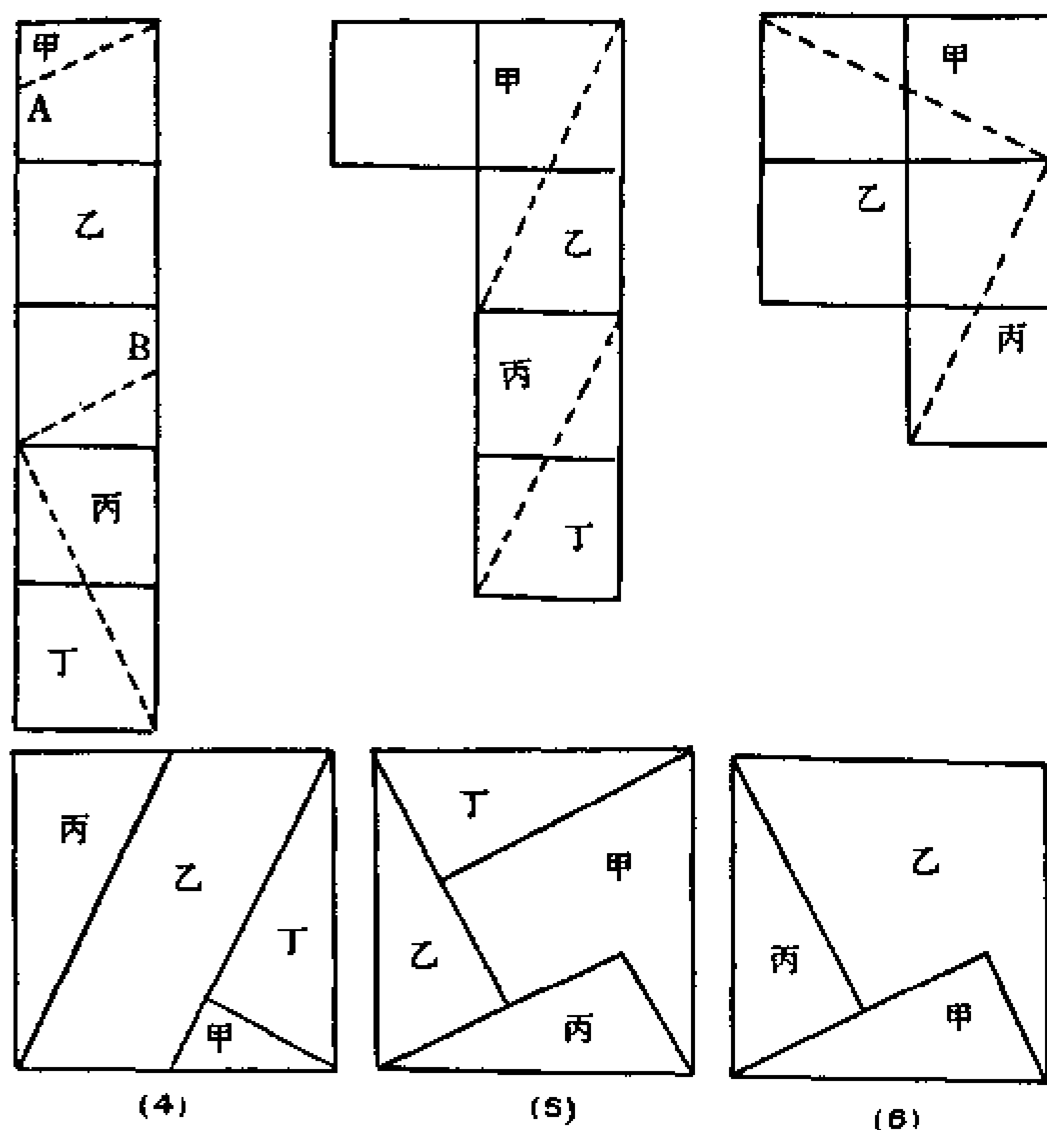


图 9

(7) 是 6 个正方形的情形，把原来正方形沿对角线分割作成直角三角形 ABC(如图 10(7))，确定 A 点，如图分割并组合就可以了. 一次组合以后，将外边多出来的部分移到里边后整个组合就会完成了.

(8) 是 7 个正方形的情形，确定 B 点，使得 BC 等于原来正 [211]
方形一边的 2 倍，联结中点，如图 10(8′)作图就可以了. 两个○是表示相等.

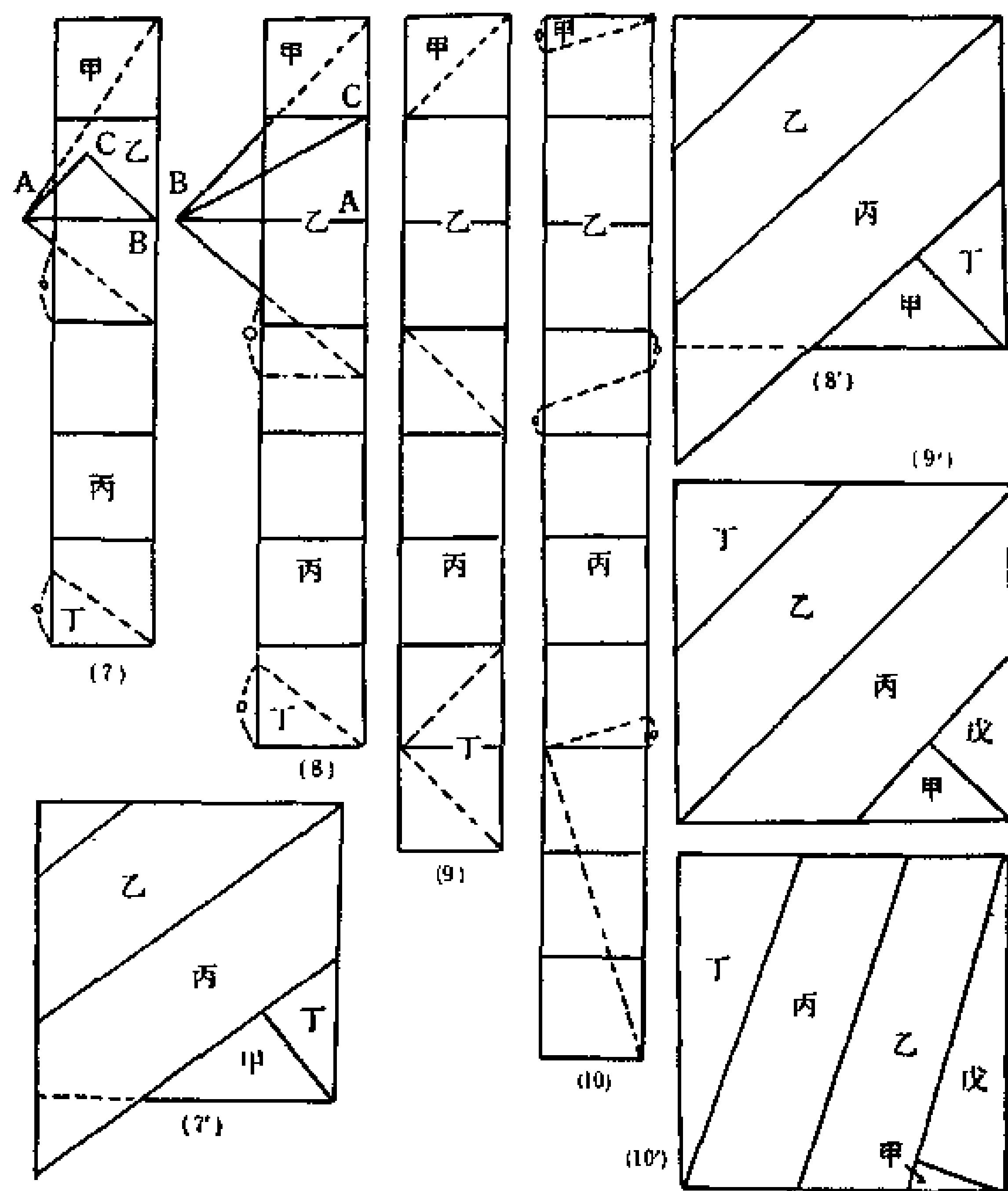


图 10

(9) 不说明 8 个正方形的情形了.

(10) 10 个正方形的情形下，○表示正方形一边长度的 $\frac{1}{3}$.

[212] 同样的正方形的分割合并的情形就有这些，但中根在最后，

介绍了把不同的两个正方形进行分割合并作一个正方形的方法，以及分割合并长方形作正方形的方法.

两个不同的正方形的情形下，如图 11 并列两个正方形，在 AB 上取 C 点，使 AC 为较小的正方形的一边，进行分割合并就可以了.

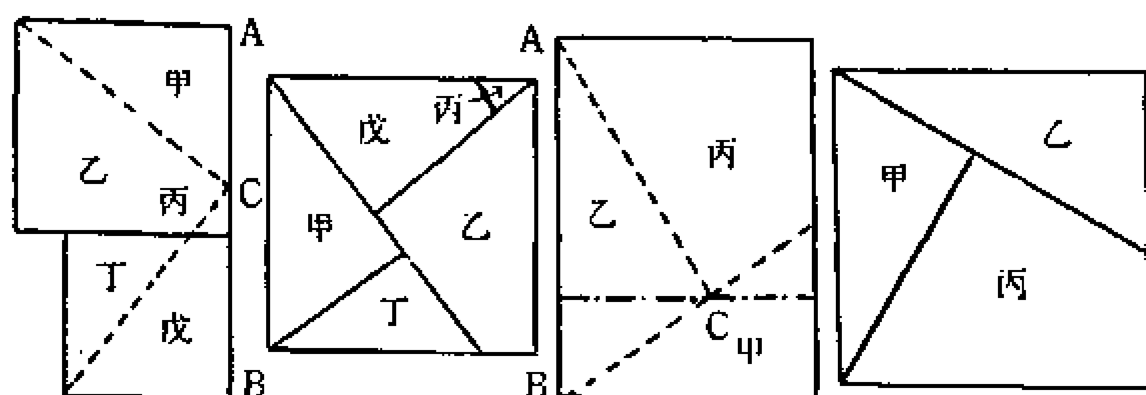


图 11

在长方形的情形下，按照长方形的一部分成为正方形的要求将原来长方形折成两个部分，并记折子线. 在折子线上取 C 点，使得角 ACB 为直角的标准分割合并就可以了.

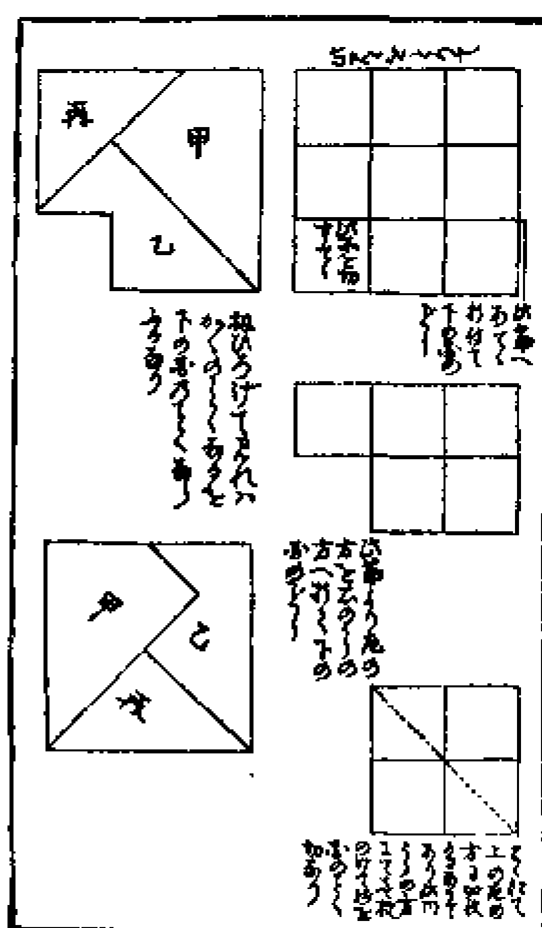
中根彦循只介绍了这些解决方法，没有给出证明. 但有这些资料以后，把 n 个正方形分割合并后能够构造一个正方形.

最后，在中根彦循的《堪者御伽双纸》中有分割合并问题的杰作，下面直接引用原文：

"例如，将四方纸(如图 12)，以纵横三折，切弃其一角，以三刀切其余，又作一四方也(四方为正方形).

虽然自古以来，众所周知此形，然至近世，环中仙改良为以一刀分割之法."

以原文的说明看，把正方形的纸纵横两边进行三折，扔掉它的$\frac{1}{9}$，用三刀分割（三次分割），再组合这些被分割的图形来作正方形. 从古代开始人们都熟悉这种方法. 到近代以后，



环中仙改良了过去的方法，发表了用一刀分割来组合正方形的方法，下面记述了这种方法．如下面的原图 12.

环中仙的真名叫做不破仙九郎．他的著作有《初
[213] 心算法早传授》(享保 12
年)、《和国智慧较》(享保 12 年)、《拾珍御伽机训蒙鉴》(享保 15 年)、《散华袋》(享保 18 年)、《唐土秘事海》、《本朝神仙要术》等，他是日本国的数学游戏和奇术的鼻祖.

[214] **图 12** 《堪者御伽双纸》中插图.

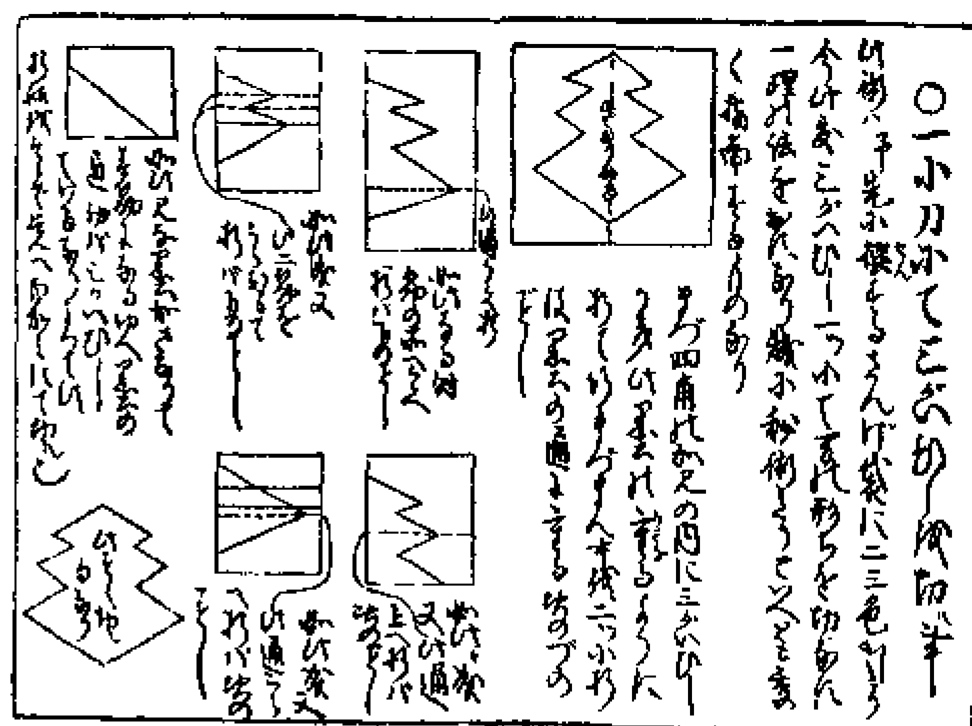


图 13 《和国智慧较》中的插图.

4. 一般情形

作为分割合并的一般情形来论述是有些勉强的，但却在弘化2年（1845年）出版的武田真元《真元算法》中有如下论述：

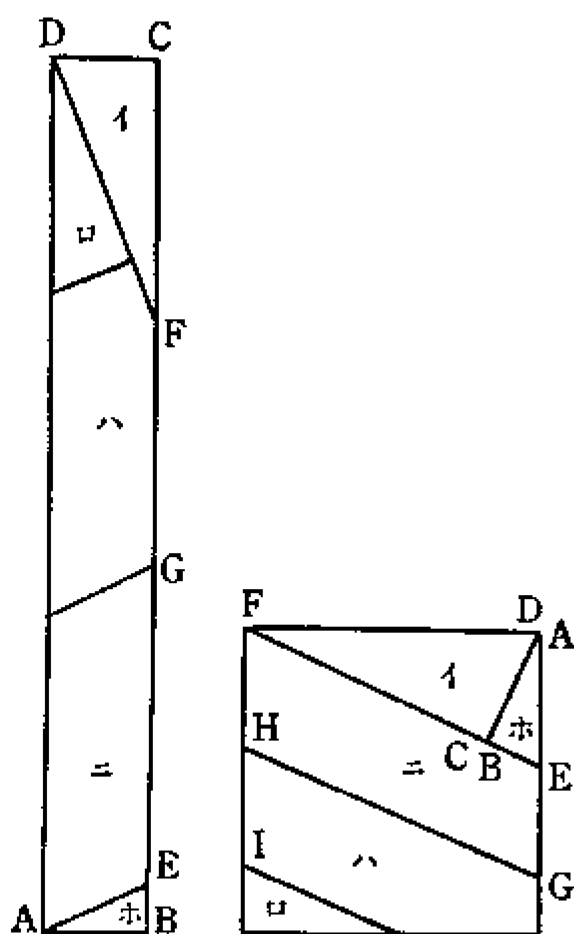


图 14

武田真元说：取细长的纸 $ABCD$（设 $AB=a$，$BC=b$）．首先，根据计算，求正方形的一边 FD．我们可以用几何学方法作图．

如果在图14右边的图中取 $DF=\sqrt{ab}$，那么，$CF=\sqrt{ab-b^2}$．又取满足以下条件的 E 点

$$BE=\sqrt{\frac{a^3}{b-a}},$$

我们也能够用几何方法作图．

这里相反地作以 FB 为一边的正方形，取 G,H,I，使 [215]
得 $AE=EG=FH=HI$，又回到原来的图，按ニ、ハ、ホ的形式分割就可以了．

这个分割方法的根本原理是，只要证明角 FDC 和角 BAE 互为补角①就可以了．只要证明 $\sin\angle EAB=\sin\angle DFC$ 就可以了．这是根据计算结果——两边为 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 来确定的．

---

① 原文为“补角”，但两角 FDC 和 BAE 之和为一个直角．如图14右图，实为现在的互为余角．

5. 用正五边形作长方形和正方形

在日本和西方都有分割组合由正五边形制作长方形和正方形的问题.日本的这类问题存在一些欠缺,但西方的也并不是完美的,因为使用比例中项的缘故,作为纯粹的分割组合问题也是有些勉强的.

现在的东京顺天高中的创建人,明治初年为普及西方数学而活跃的福田理轩(1815—1889)的著作《算法玉手箱》(明治12年)中论述了分割组合的问题.

图15之右图中,P 点是正五边形 $ABCDE$ 的对角线 AC 的中点.S 是从 P 引 BC 的垂线的垂足.T 是 AB 边的中点.R 是使 $BS=ER$ 的点.从 R 引 ED 的垂线,又从 DC 的中点 Q 引该

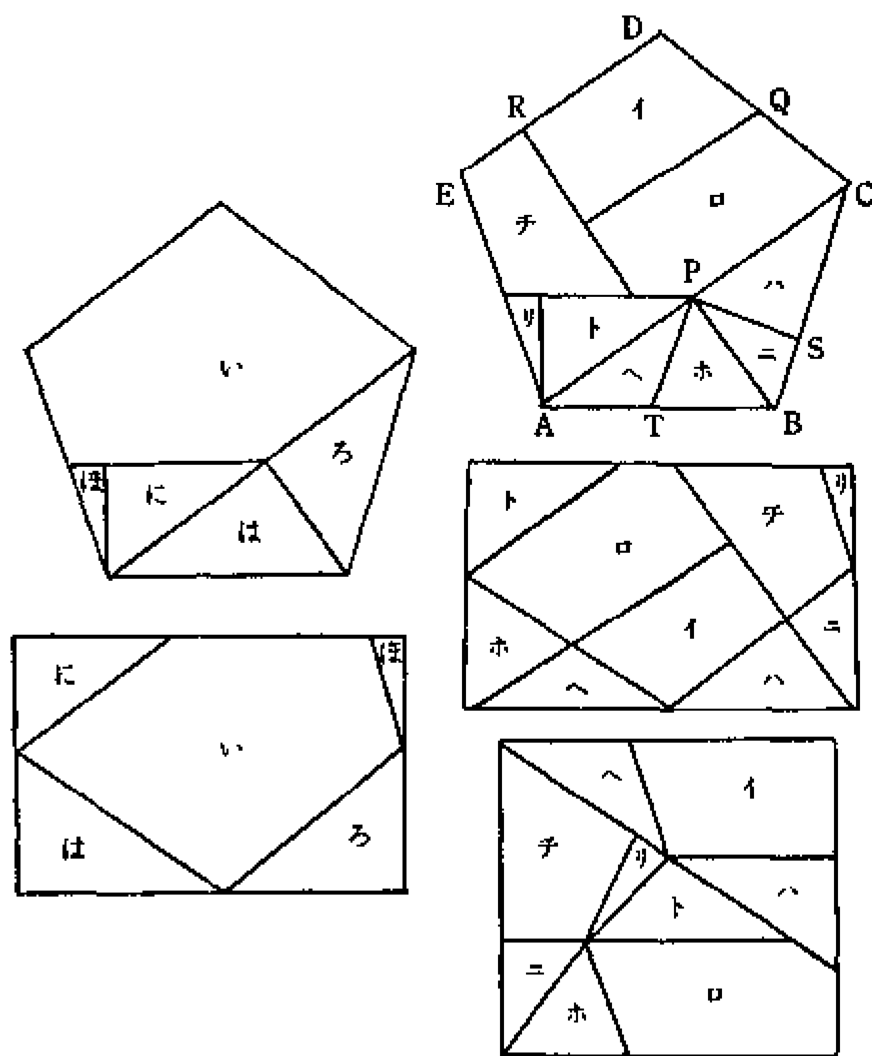


图 15

垂线的垂线. 从 P 引 AB 的平行线，从 A 引该平行线的垂线.

这样(如图 15)分割组合以后，就得到长方形和正方形，但这个正方形不是真正的正方形. 边长有一些误差.

此外，如左边的图，用い、ろ、は、に、ほ五个部分，分割组合成长方形也是非常有趣的. [216]

下面我们看一看西方正五边形的分割组合问题.

首先，在图 16 左图中，把正五边形 $ABCDE$ 分割成 7 个部分.

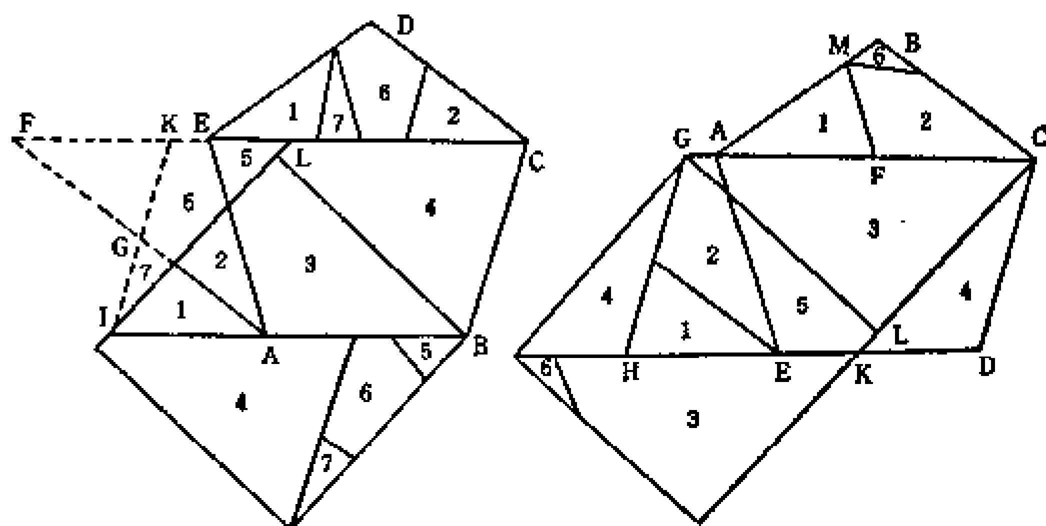


图 16

延长对角线 CE，取 EF 等于正五边形的一边. 连接 A，F，则

正五边形 $ABCDE$ 的面积＝四边形 $ABCF$ 的面积.

其次，经过 AF 的中点 G，引 BC 的平行线 KI，则

四边形 $ABCF$ 的面积＝平行四边形 $IBCK$ 的面积.

以 I 为中心，作以这个平行四边形的高与底边的比例中项 [217]
为半径的圆. 设该圆与 CE 的交点为 L，从 B 引 IL 的垂线，以该垂线为一边的正方形的面积，等于原来五边形的面积.

这样，在图 16 中所表示的那样分割组合就可以了.

再看另一种解答. 如图 16 右图.

对角线 AC 的中点为 F，在 DE 的延长线上取 H，AB 上取 M，使得

$$EH=AF=\frac{1}{2}AC=AM.$$

过 H 作 DC 的平行线 HG，那么，把三角形 ACB 分割后就能够组合成四边形 $GHDC$.

这里把平行四边形 $GHDC$ 分割组合成正方形的方法，和前面相同.

其次，作平行四边形 $GHDC$ 的底边和高的比例中项，要取这个比例中项等于 CK. 从 G 引 CK 的垂线 GL，作正方形，按照图示进行分割组合就可以了.

6. 鲁金的问题

大约在 30 年以前，莫斯科大学的鲁金(Lusin)教授提出了下面的问题：

[218] "把一个正方形能否分割成若干个完全不同的正方形?"

下面的图就是把边长为 13 的一个正方形分割成 11 个正方形的情况.

$$13^2=7^2+6^2+6^2+4^2+3^2+3^2+2^2+2^2+2^2+1^2+1^2,$$

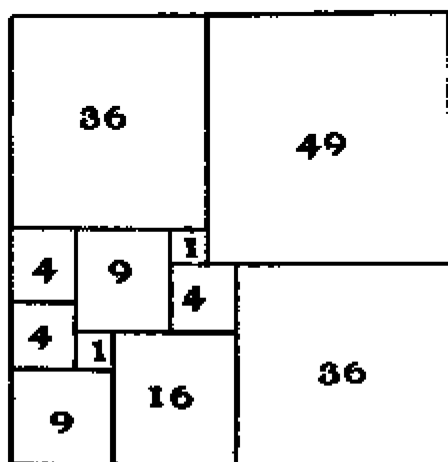


图 17

这里有相同的正方形两个或三个，因此这不是鲁金的正方形.

至今人们已经作出数百种分割正方形的实例，但还没有发现鲁金所要求的把一个正方形分割成若干个完全不同的正方形的例子. 同时也没有能够证明这个猜想不成立. 猜想提出后，人们只发表了 5 篇关于鲁金问题的论文. 由于这些论文是在二次大战之前发表的，所以，现在很难看到. 1951 年，瑞士的贝伦给日本的《东北数学杂志》投了题目为"Hugo Hadwiger"的论文，文中简单地证明了下面的命题.

“长方形能够被分割成完全不同的若干个正方形.”

贝伦用群论方法证明了这个命题,但在这里不能介绍他的具体证明了.

在这些外国人的实例中的长方形两边长度的差都是大于4.但安部道雄早在20年前,给《日本数学物理学会志》第四卷上的论文中,列举了长方形的两边之差为1,能够分割为若干个完全不同的正方形的很多实例.最小的一个例子如图18:

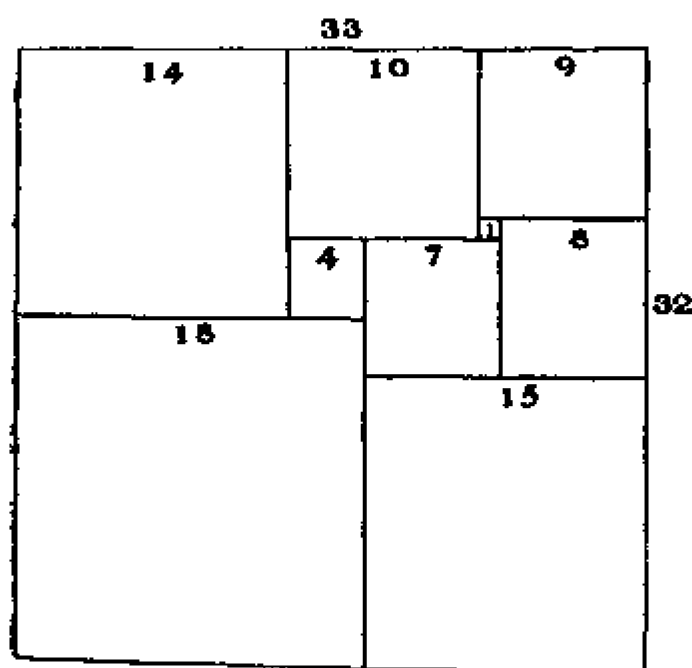


图 18

安部道雄列举了被分割为完全不同的若干个正方形的两边差为1的长方形22个: [219]

(32,33), (80,81), (96,97), (97,98),
(104,105), (105,106), (144,145), (170,171),
(176,177), (280,281), (307,308), (479,480),
(480,481), (482,483), (532,533), (551,552),
(882,883), (911,912), (969,970), (1 463,1 464),
(1 479,1 480), (4 943,4 944).

这里最引人注目的是,两边的差为1,而且边长非常大的时

候,长方形就接近正方形.无论是长方形可能被分割为完全不同的正方形,还是正方形被分割成完全不同的正方形的实例,至今还没有发现,也没有得出能否分割的证明①.

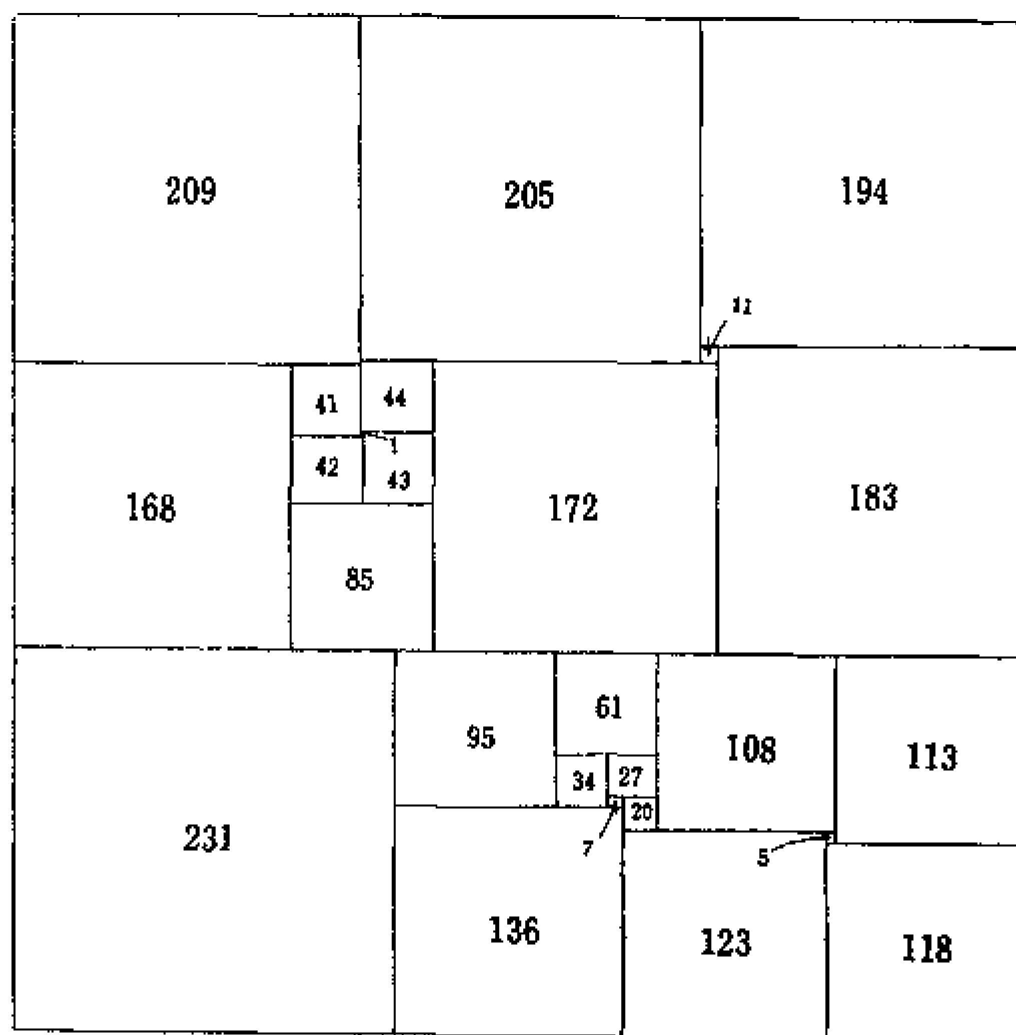
安部道雄进一步列举了两边差为 2 和 3 的例子.

两边差为 2 的长方形:

(55,57), (167,169), (183,185), (239,241), (303,305), (435,437), (815,817), (847,849), (887,889), (897,899), (8 299,8 301).

---

① 1940 年,Tutte 已经解决了鲁金问题,见杜克数学杂志(Duke Mathematical Journal,vol.7,1940,p. 333).如鲁金问题图,将一边为 608 的正方形分割成 26 个不同的正方形.(一松信)



鲁金问题图

两边差为 3 的长方形：

(95,98)，　(269,272)，　(290,293)，　(515,518)，
(853,856)，　(920,923)，　(2 501,2 504).

这样，也进行了用这些长方形能否组合为正方形的研究，但没有能够实现.

与此类似的问题，也伤透了 300 年以前的日本数学家的脑筋.“被炉问题”中，制作“被炉”时，必须要考虑如何铺叠的问题[1].

宽永 18 年(1641 年)，吉田光由的《新篇尘劫记》中提出了三种，下面要介绍其中的两个. 其一，如果是十二张叠的房间，那么，在不分割叠的情况下，恰好在房间的正中间能够造炉.

其二，在八个叠的房间正中间造炉时，必须把叠缩小一些. 如图 19. [220]

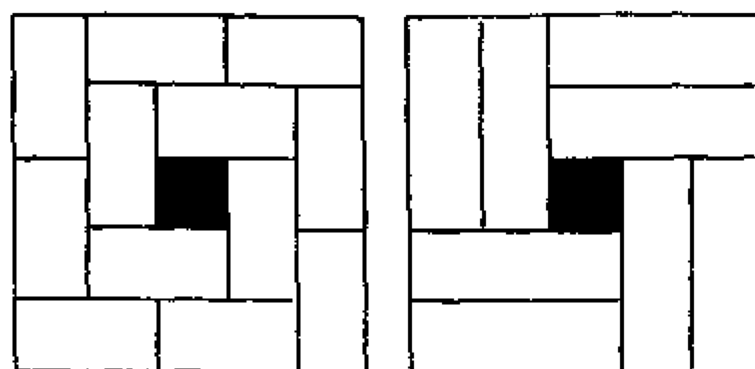


图 19

7. 从正方形到正方形

分割组合正方形，制作若干个正方形的问题，散见于西方数学书中，这里列举其中的两三个典型例子.

在正方形 $ABCD$ 的一边 AB 上取一点 E，使得

$$AE=\frac{1}{2}(\text{对角线}).$$

---

① 起初日本房间面积为 12.5 叠，所以半叠的地方可以造“被炉”. 用 8 张叠不能做“被炉”.

作 DE 的两个垂线 AF，CG，从 G 引两边的垂线，那么，就会确定了 3，4，5，8 的形状．以此为基础，能够确定两个正方形的大小，因此，如图 20 所示，可以分割组合成两个正方形．

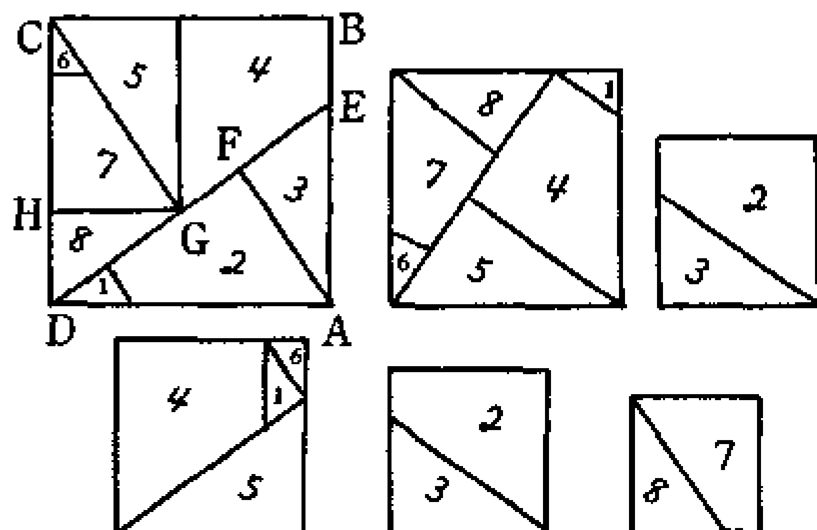


图 20

在此相同的图形的基础上，如下面的图那样，也能够分割组合成三个正方形．

另外，如果按下面的方法进行，那么，能够分割组合成三个相同的正方形．

与前面的图形相同，引 DE，作它的垂线 AF．这样按下面的
[221] 顺序确定，

$$AF=DG=FL=GH,$$

那么，就能够分割组合成三个全等的正方形．从相反的角度思考的话，分割三个相同的正方形后也能够组合成一个正方形．

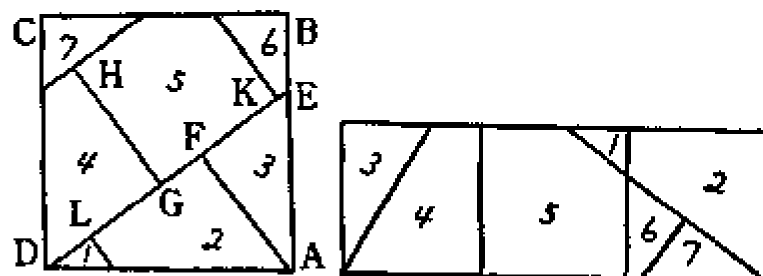


图 21

8. 从正六边形到正方形

把正六边形按照对角线分割，并把边连接在一起，作一个平行四边形 $ABFE$. 其次，取 AG，使得和平行四边形的高和底边的比例中项相等，再延长 AG，从 E 引垂线，分割组合成以该垂线为一边的正方形就可以了.

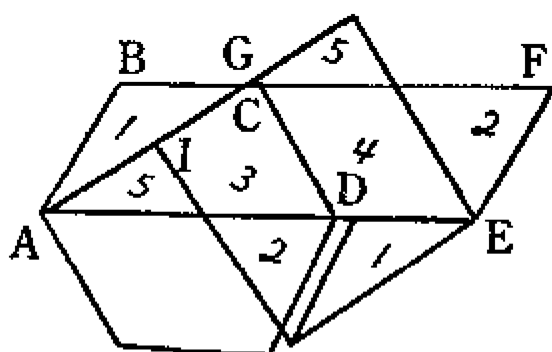


图 22

9. 从十字架到正方形

西方人从很早以前就知道分割组合十字架来制作正方形的方法. 这里介绍其中的具有代表性的问题. 这里所说的十字架的宽度为均匀的.

(1)(2)(3)是通过边的中点分割的情形. 这种问题，例如(2)，折叠后，只用一次插进剪子剪一下就可以了.

(4)(7)为组合成的十字架以外，能够再制作一个十字架.

(5)是能够制作相同的两个十字架. (6)(8)的特殊情形可以被看作(2).

下面要介绍分割组合十字架来制作三角形和长方形的情形.

(9)是制作直角三角形的情形，把原来十字架的边，通过直角边的三等分点和斜边的四等分点分割就可以了.

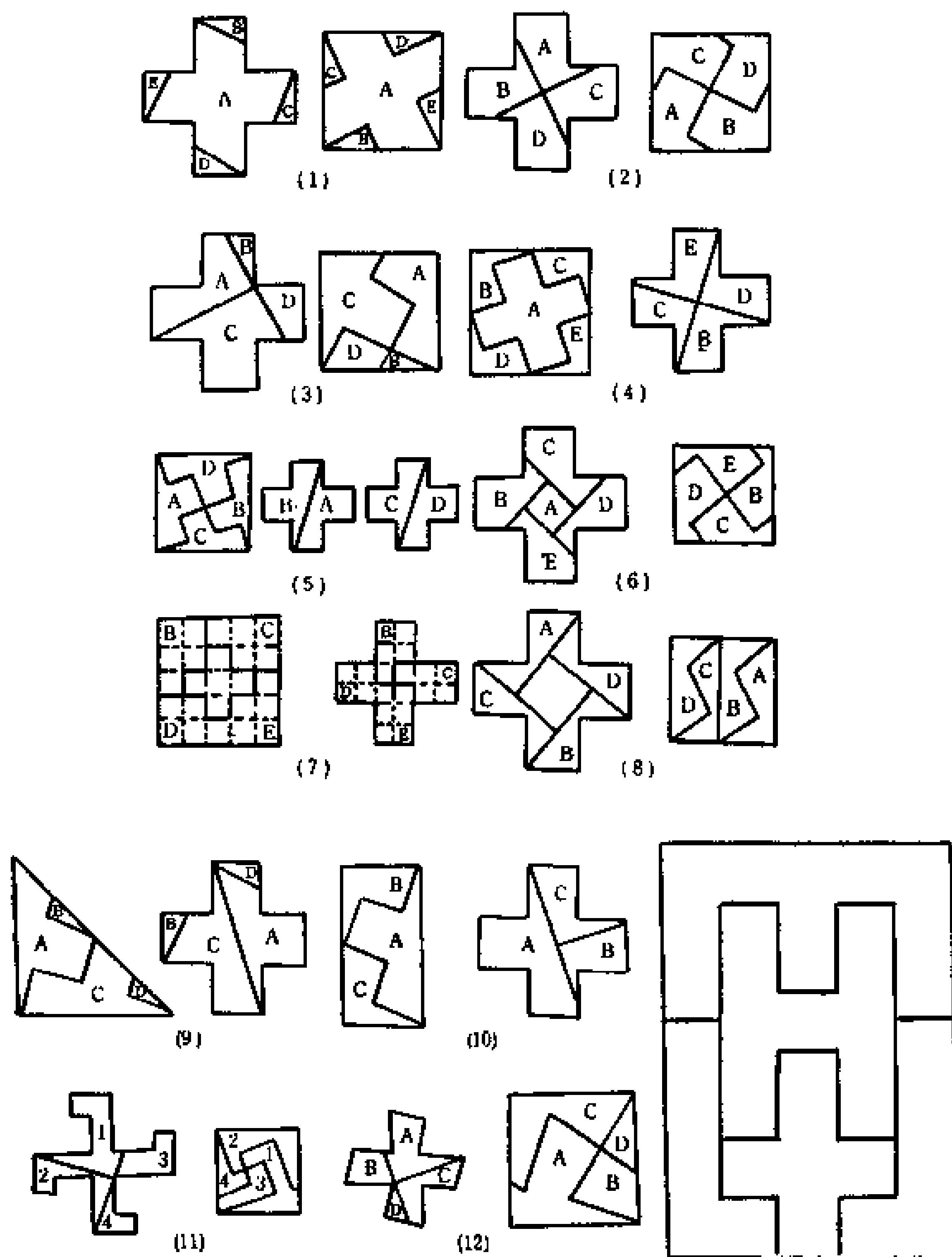
(10)为长方形的情形，通过较短边的三等分点，较长边的六等分点分割就可以了.

最后，再介绍与十字架类似的两个例子.

右边的图中，把长方形的纸分割成五个部分的情形，其中有一个十字架. 其余的四个部分表示 H，E，L，L. 这样，就分开了天国(十字架)和地狱(HELL).

上述分割组合十字架是在西方公元以前就开始传播的问

题，希腊人把它叫做十字架难题(Greek cross puzzle). 据说这种形状是模仿了希腊文字.



[223]

图 23

第2节 七 巧 板

1. 西方七巧板

西方人叫做"七的世界"或"幸福的七". 把纵横比为5:4的长方形板子,如图切开七个部分,然后,组合制作各种各样的图形的游戏. 日本也经常流行小册子,因此,七巧板也是家喻户晓的游戏.

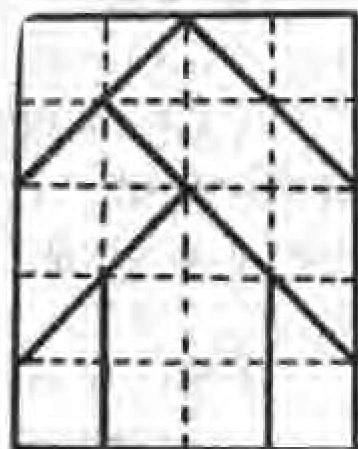


图 24

据说这种分割方法是从古埃及坟墓图案中取材的,这个游戏已经有4 000多年的历史了.

[225]

仅用7块板子,能够制作数千种图形实在是非常有趣的事情,人们自己想像图案,同时也以他人制作的图案为轮廓去思考其组合方法,这是富有乐趣的一种游戏.

下面的图案为从左到右:十字架、狮子、愤怒的猫和鱼.



图 25

2. 日本七巧板

日本国很早以前就有类似的游戏. 给起了"清少纳言智慧板"("智慧板"就日本语中七巧板)的典雅的名称. 遗憾的是《源氏物语》的有些古文献已经失传了. 但被认为一直到江户时代以

口传的形式流传下来了，宽保2年(1742年)有一个人以“含灵轩”的匿名写了一本小册子，书中说：

“记清少纳言，见古书，多见富于智慧，使人心愉快之事.其中，有命名为智慧之板，表现图之智慧卷.当阅读此书时，幼稚儿女，因智之深浅，自然取万物之形，作各种器物之图，确为微妙也.虽则，其图为往昔之器物之形，又为灵上御持之物，故今日之儿女不知其心.故，重新复制其图之器物，记其近似之形.”

从这序文可以看出，当时清少纳言写的古书还在流传.清少纳言的书中说明了古时候的器物或灵上(宫中)器物的图案格外美妙.但那些图是古代的东西，对现在的儿童来说不好理解，因此，制作了新图.

该书中，有50多幅图.基本图形是正方形.

分割方法如图26.连接正方形各边的中点，分割成如图那
[226] 样的7个部分.这个切割方法在数学方面来说也是非常有趣的，当然用别的方法也可以组合成正方形.又可以组合为在正中间有正方形口的正方形.把这两个图形叫做“色纸”和“钉贯”①.

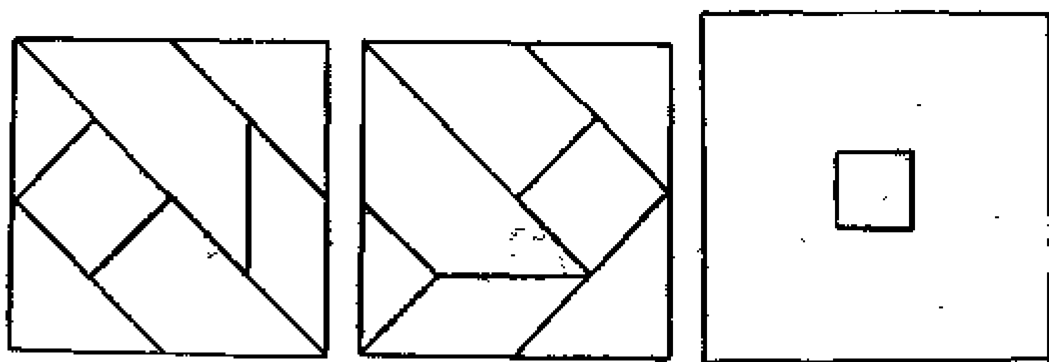


图 26

现在从这本书中选几个例子加以说明.它们都有非常深奥的名字.

在图27(一组图)中，第一段从左面开始的是“八角镜”.古代

① 日语中“色纸”是指正方形的后纸；“钉贯”是指穿孔订钉子.

的镜子用金属材料制作，有把手. 其次是“花瓶”. 古代插花瓶时使用竹子制作的器具. 第三个是“崩家”①，最右边的是“三层塔”.

第二段的第一个是“泊舟”. 带蓬的船，漂泊在水面上. 其次二是“石灯”和“神镜”. 最右边的是“折尺”，折成直角，由于用铁制作的，所以也叫做铁尺.

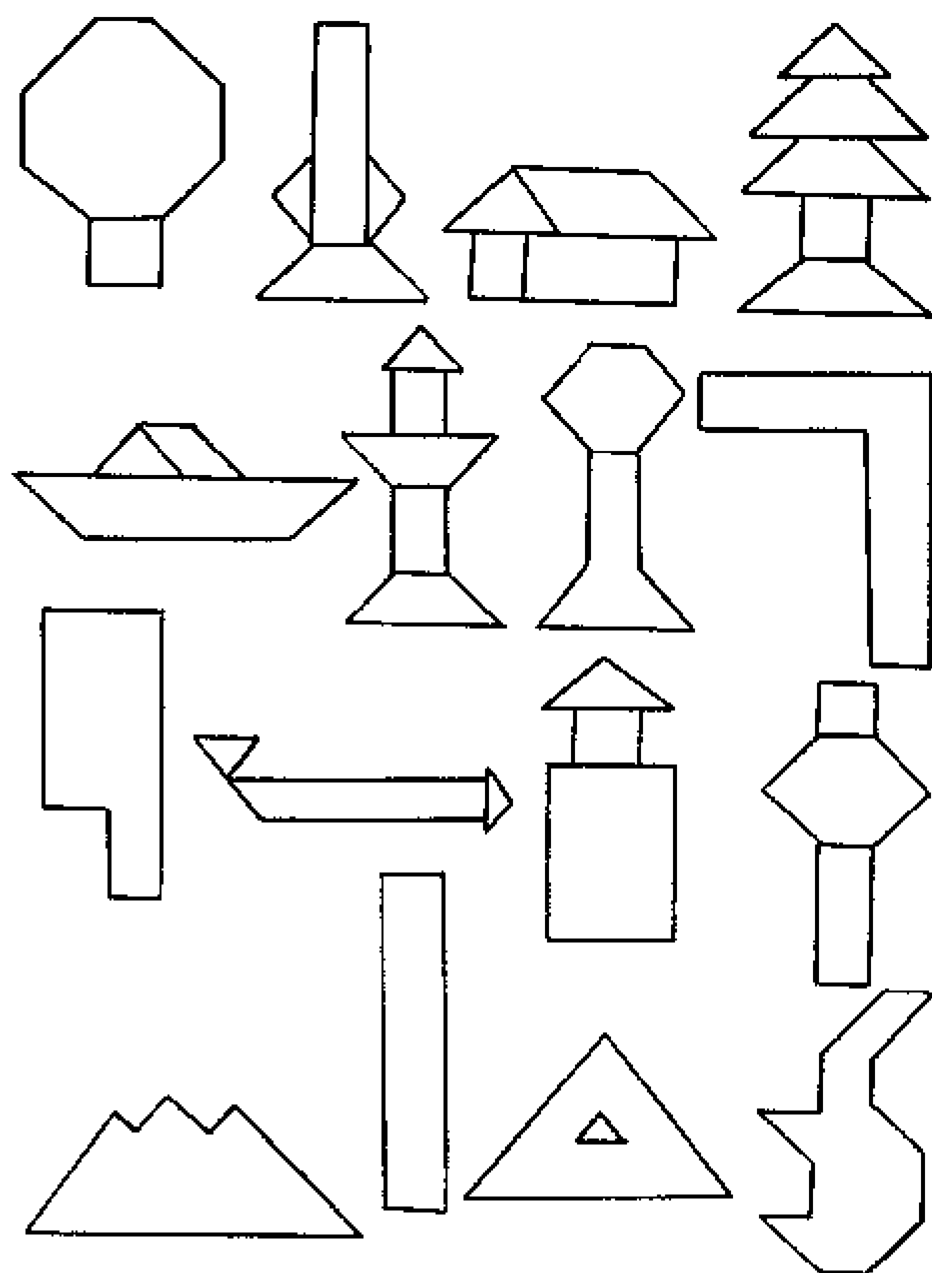


图 27

① 日语中“崩家”是指倒塌的房子.

第三段的前两个是“庖丁”和“烟袋”. 第三个是“时钟”，这时钟的形状是人们所说的城楼上的时钟. 最右边的是“秃角四边形”器具，盛夏夜晚，其中点灯.

第四段的前两个是“富士山”和“长方形诗笺”. 把后面的三角形叫做“鳞形”，中间有口. 最后一个是“猴子”，这可能是卷曲身体的猴子.

这个小册子的前半部列举了这些图形，后半部说明了这些图形.

在前面提到的柳亭种彦的《柳亭记》，以及这本小册子以前的文献中，没有发现清少纳言七巧板的名字. 后面将要介绍的中
[227] 国的七巧板，要晚于这个小册子. 因此，现在还没有找到能够了解清少纳言七巧板历史的相关资料.

然而，我们可以从下面的文献中了解到出版这本书的江户时代中期，即 18 世纪七巧板流行的这件事.

其中之一就是《大江俊矩记》. 有一个人作为新年礼物给儿
[228] 子赠送了七巧板.

“享和四年（文化元年）[①]正月六日丙申，美浓屋伊介，礼物绢系一包，给两个儿子，七巧板一箱，象棋一箱.”

此外，在《武江年表》中有如下记载：

“记此年（延享）之事. 延享二年春，曾有过江户之流行物之句集[②]. 题目为《时津风》. 时时庵门人，叫反故斋果然的人编写，撰写者只写出了目录.

智慧筏，今日之儿童游戏，为七巧板也.”

这正说明七巧板在江户时代非常流行，但遗憾的是现在人们全都忘掉了.

在富山县出身的著名和算专家，中田高宽于安永（1772—

---

① 享和四年和文化元年是同一年，即 1804 年.

② “句集”指短诗集.

1780)年间写的《并物》中研究了《清少纳言七巧板》.

3. 中国七巧板

西方七巧板有7个部分. 日本七巧板和中国七巧板都有7个部分. 如果说这一致性是偶然的,那么,似乎使人感到这是不可思议的,用7块板来协调组合一个整体,它们之间的关系如何,对我来说实在是找不到任何线索.

我手头的最早文献是于嘉庆8年(1803年)出版的《七巧图合璧》. 该书序文中说:

"七巧之板,不知何人所创,其资戏娱,巧中巧者."

但是,没有过多久,天保10年(1839年)在日本出版了该书. 出版者在序文中说:

"本邦(日本)有七巧板之游戏,忆吾童年之时,当置为玩具,近日购得舶来檀几,其形略与此相类,始知彼邦(中国)亦有此游戏,而未知其名."

从这个文献可以知道大体的情况,七巧板不是从日本传到中国的,也不是从中国传到日本的游戏. 文中说"未知其名",因为在中国叫做"七巧八分图"和"益智图". [229]

正如序文中所说,中国古代的器具,即便现在也销售着完全相同形状的东西.

中国的七巧板如下面那样分割组合起来的. 如图28中所示那样,给每一块起了名字. 这和日本的七巧板不同,但如果除两个"大"三角形以外,其他5块斜、小、方、小、中,能够组合成如下

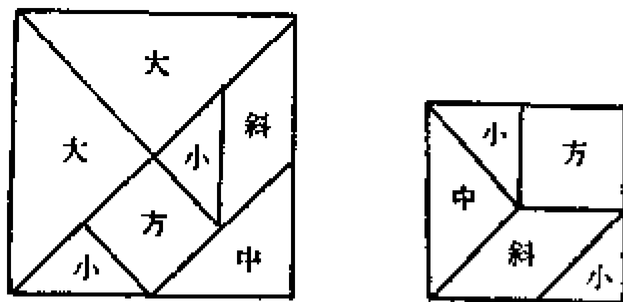


图 28

面所示的正方形.

在该书的原书中约有300幅图形,但复刻本只选择了大约100幅图形.作图的心境完全不同,日本所采用的都是器物图形,而中国所表现的是具有大陆心境的图形.如下4幅图(图29).

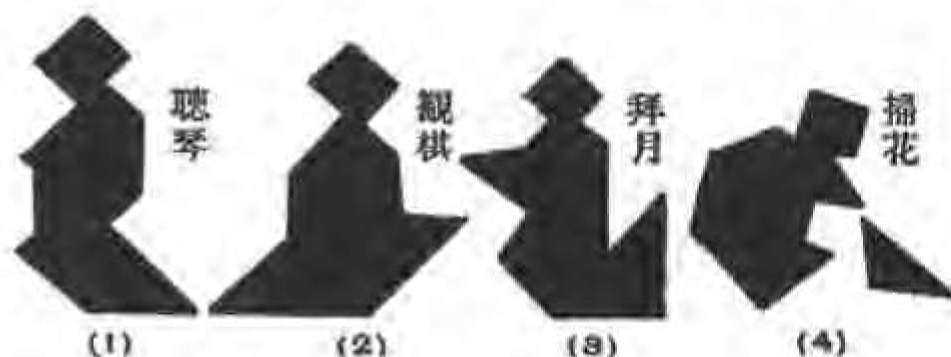


图 29

(1)是倾听弹琴的样子.(2)是旁观他人下棋的姿势.(3)是
[230] 观月的姿势.(4)是打扫散落的花的姿势.无论是哪一个都淋漓
尽致地表现了那个心境.

七巧板游戏曾经在中国广泛流行过.一位叫秋芬室的女子花一生收集了七巧板的图形.总计1 500多种,是一种图文兼并的壮观的东西.她把它们分成8个部分,并出版了六册《七巧八分图》的巨著,时间是咸丰11年(1861年).下面的这个图形是从《七巧八分图》中抽出的一组图形,上面的是"七巧八分",下面的是"山川草木"."草"使用了古字.

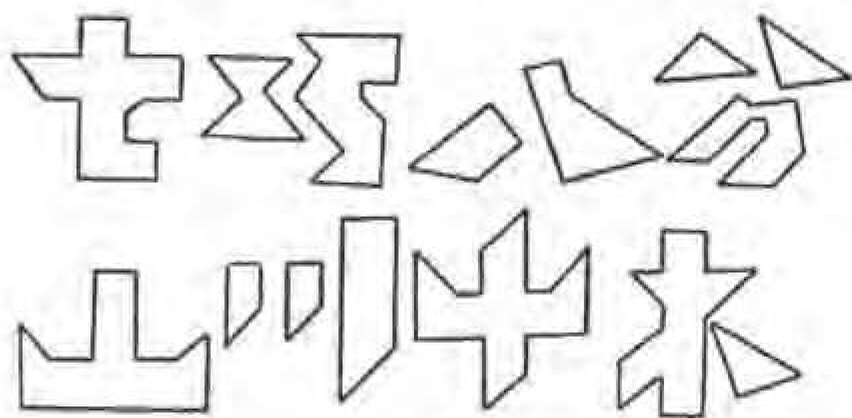


图 30

图 31 是利用三组七巧板，把绘画进行图案化了的东西. 表现了正在饮酒的场面.

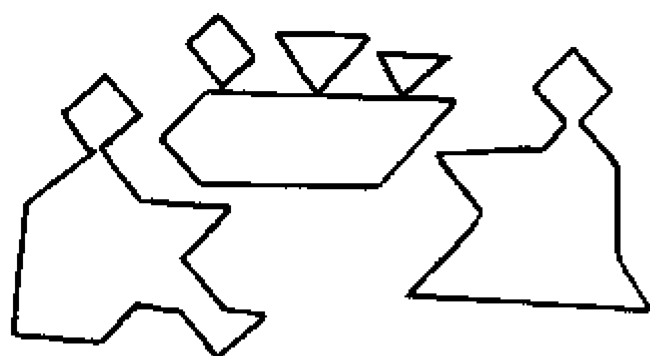


图 31

除以上七巧板以外，另外还有一种《益智图》(6 册). 这是光绪四年(1874 年)果睫(亦称睫果)写的书. 如图 32，把正方形分成了 15 个部分. 由于使用了圆弧的缘故，所制作图形的数量非常大. 果睫在光绪 19 年(1893 年)又用这种方法写出了千字文的全部 1 000 个字. 图 33《益智图》就是用这种方法制作的.

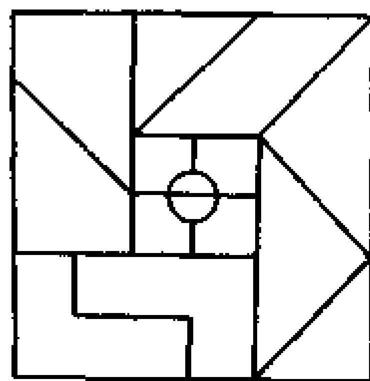


图 32 [231]

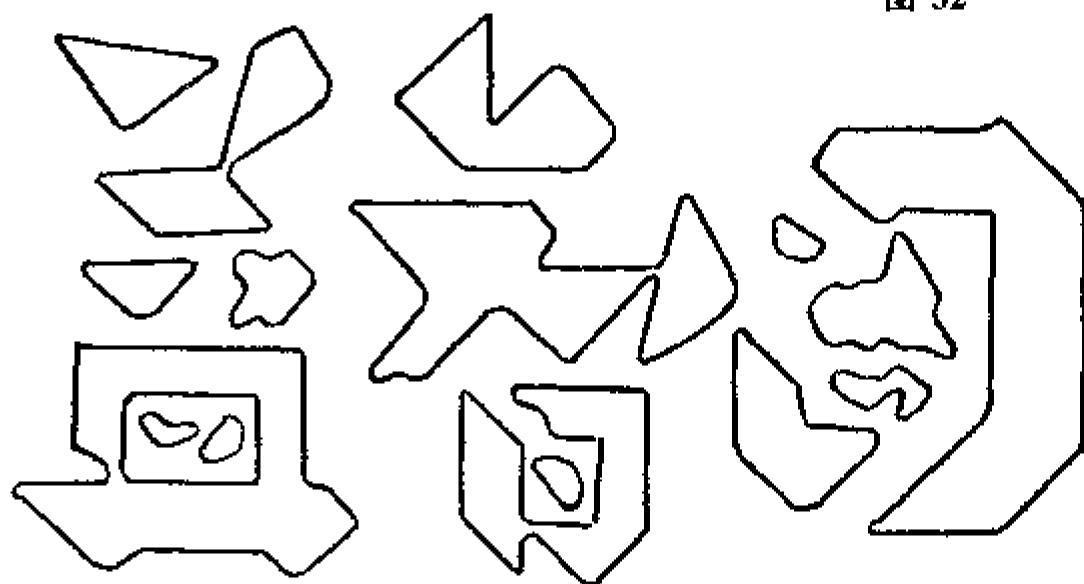


图 33

第3节 折纸几何学

结合分割组合问题，下面将介绍折纸方法.

把任意一张纸折成两个部分，作折子标记. 展开一次后，再折纸，使折子标记重合，于是制作了一个直角. 如果作成直角，那么，立即会折出正方形和长方形，这是众所周知的. 印度数学家顺塔拉·罗指出了在不使用圆规而只用折纸方法的情况下，在广泛的范围能够制作几何图形的可能性.

T·顺塔拉·罗，《折纸几何练习》，马德拉斯，1893 年.

下面从顺塔拉·罗的研究中举两三个例子.

1. 折正三角形的方法

(不画图，先想让你自己试一试)先折长方形 $ABCD$，使其长边 AB，CD 重合，在中央作折线 EF. 然后通过 B 点折，使 C 点落在 EF 上. 把 C 点落在 EF 的那个位置记作 P. 那么 PBC 就
[232] 是一个正三角形.

2. 以 AB 为斜边，作高为给定的直角三角形的方法

在折纸几何学中，是以该问题和黄金分割为基础的.

从 AB 折出给定高度的折线 EF. 再找出 AB 的中点 D，通过 D 的折线折出 $DB=DC$，在 EF 上找到 C 点，那么，三角形 ACB 就是所求的直角三角形(图 34).

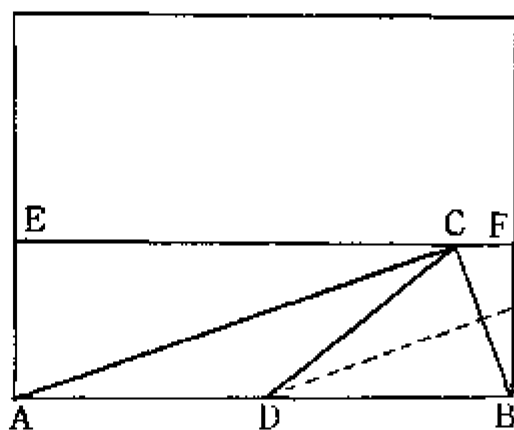


图 34

3. 折正六边形的方法

取长方形纸，通过两组对边的中线分别折一下. 被折成四个部分的长方形记作 $AOCK$. 再折

出以 AO 为底边的正三角形 AOE[①]，展开后再作折线 EF，HG，那么，就折出正六边形 $AHGBFE$（图 35）.

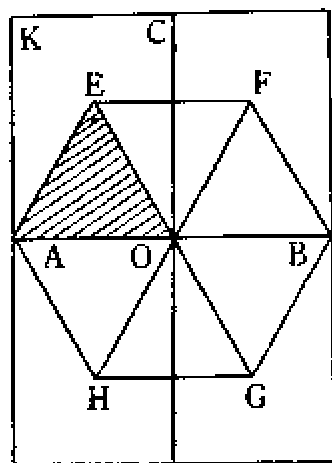


图 35

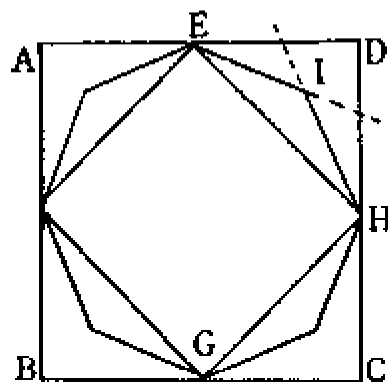


图 36

4. 折正八边形的方法

取一张正方形纸 $ABCD$. 用使相对的边重合的方法折一下，这样，就确定了 AD，BC，DC 的中点 E，G，H.

然后，使 HD 和 EH 重叠，确定角 EHD 的平分线. 用同样的方法确定角 HED 的平分线，再找到它们的交点就可以了. 其他顶点的求法与此相同.

角 EHG 是直角. 在它的两边分别加 $\frac{45^\circ}{2}$ 的角，正好为正八边形的一个内角，这样就能够证明它是一个正八边形（图 36）.

5. 折黄金分割的方法

如果 $AB=a$，$BX=x$，

那么，满足方程 $x^2=a(a-x)$ 的点 X 就是 AB 的黄金分割点. 这两个线段 AX 和 BX 的比是调和比，它的用途是相当广泛的. 当然，对数学来说，它更是重要的比例.

---

① 译者注：请参考折正三角形的方法

解上面的方程可以得

$$x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

利用这个结果，用折纸方法能够很容易地找到点 X. 首先，取一张正方形纸. AC 折半，确定中点 D. 然后

$$BD=\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

又有

$$AD=\frac{a}{2}.$$

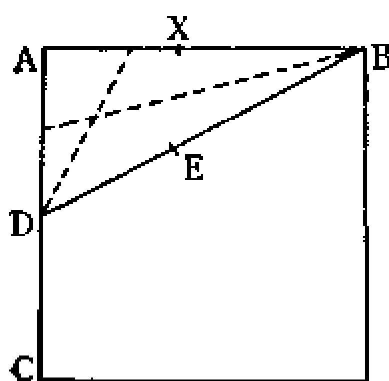


图 37

因此，它们的差为

$$DB-AD=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

这样就得到了黄金分割. 即，如果重叠 AD 和 DB 后能够确定 A 的落点 E，那么，BE 就是所求的长度，即 $DB-AD$.

最后，重叠 BE 和 BA 后能够确定 X 点(图 37).

6. 折正五边形的方法

[234] 根据前面的折纸方法，在 AB 上确定黄金分割点 X. 折较短的线段 AX 来确定中点 L. 又能够确定点 K，使得 $AL=BK$. 这样 KL 为正五边形的一边. 于是，如图 38 作就可以了. 根据计算来证明这个结论.

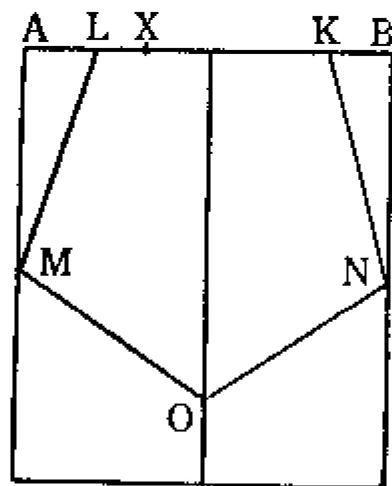


图 38

顺塔拉・罗进一步研究了折出正 10 边形、正 15 边形、正 17 边形的方法.

折正 10 边形的方法，与从正方形折出正 8 边形的方法相同，但折正 15 边形要根据 $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$，即利用正 6 边形和

正10边形的方法来实现.折正17边形的方法是根据高斯的正17边形的作图方法.

7. 用缎带作正五边形的方法

用有一定宽度的细长的缎带折正五边形的方法,如图39所示,是众所周知的.但如果利用对角线的对称且相等的性质,可以给出数学证明[①].

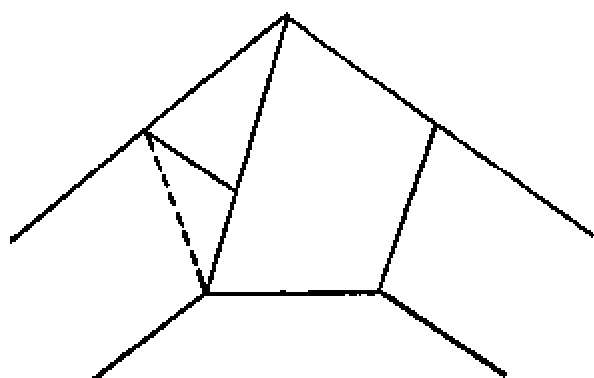


图 39

第4节 圆规几何学

前面介绍的折纸几何中,允许延长直线、作直角、平分角等很多自由的作法.与此类似地,也有只用圆规能够制作什么样的图形,只用火柴根能够制作什么样的图形等方面的研究.这里介绍用圆规作图的方法. [235]

所谓圆规作图,就是只使用圆规作图.这是意大利数学家玛斯克罗尼(Lorenzo Mascheroni,1750-1800)最早研究的课题,他主张只使用圆规作初等几何中的所有图形.

---

① 用一条缎带不仅能够作正五边形,也能够作正七边形.用两条缎带可以作正六边形和正八边形.在河出书房出版的《日本少年百科全集》第二卷"不可思议的数"中介绍了H. Martyn Cundy和A. P. Rollett的"数学模型"中的该问题.

毋庸多言，由于只使用圆规，那只允许画圆．点是作为圆弧的交点而决定的．下面通过几个实际例子说明．

1．将线段延长2倍

因为禁止使用直尺，所以不能画出实际的直线．以两点确定一条直线来解决．

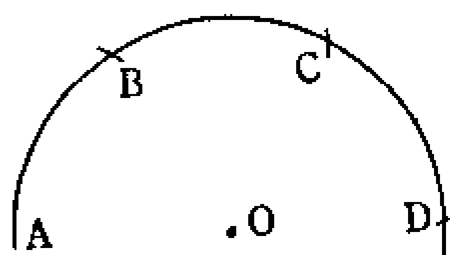


图 40

「作图」OA 是已知有限直线，以 O 为中心，以 OA 为半径画圆．在圆周上依次取与半径相等的线段 $AB=BC=CD$，那么，D 就是所求的点．其理由是显然的（图 40）．

2．求已知圆弧 AA' 的中点的方法

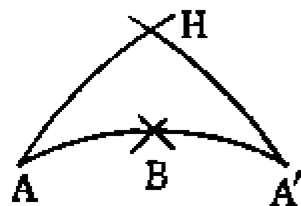
设：圆心 O 是给定的．

［作图］作以 A，A' 为圆心，过圆弧 AA' 中心 O 的圆．在该圆周上取两点 E，F，使得

$$AA'=OE=OF.$$

其次，作以 E，F 为圆心，通过 A，A' 的圆．设它们的交点为 H．如果以 OH 为半径，以 E，F 为圆心画圆，那么，其交点 B 就

[236] 是所求的点．（图 41）



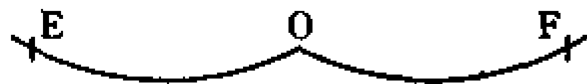


图 41

证明这个结论时，相反地，设 AA' 的中点为 B，取 $EB=OH$ 就可以了. 由作图可知，$AEOA'$ 成为平行四边形，角 EOB 为直角. 因此，E,O,F 为共线. 因为，AO 为三角形 AEF 的中线，因而有

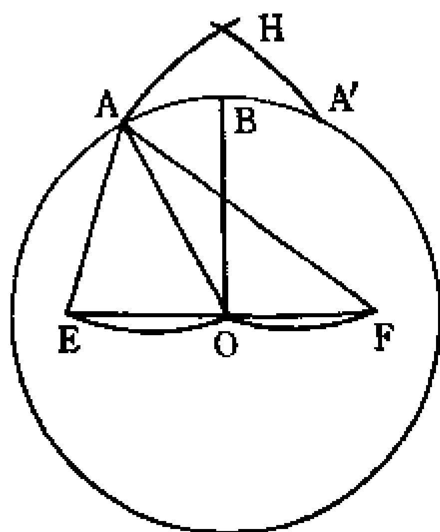


图 42

$$AE^2+AF^2=2(AO^2+EO^2).$$

由对称的性质可知，H,B,O 在同一条直线上. 利用这些性质可以作以下变形：

$$\begin{aligned} EB^2 &= FB^2 = EO^2+OB^2 \\ &= EO^2+OA^2 \\ &= EA^2+FA^2-EO^2+EA^2 \\ &= FA^2-FO^2=FH^2-FO^2=OH^2. \end{aligned}$$

由此可知，$EB=OH$.

3. 求三条线段 l,m,n 的第四比例项的方法

[作图]以 O 为圆心，以 l,m 为半径画圆. 半径为 l 的圆周上取两点 A,B. 设 $AB=n$. 其次，以 A,B 为圆心，以适当的长度为半径画圆，与其他圆相交的点表示为 X,Y，那么，XY 就是所求的直线.

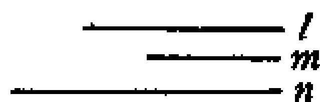


图 43

其理由是，如果连接各点，那么，三角形 OAX，OBY 三边对应相等，因而全等.

故

角 AOX = 角 BOY，

进而　角 AOB = 角 XOY.

然而，三角形 AOB 和三角形 XOY 为两个等腰三角形，它们的顶角相等，因此，这两个三角形相似. 故

$$\frac{OA}{OX}=\frac{l}{m}=\frac{AB}{XY}=\frac{n}{XY}.$$

故，XY 就是 l，m，n 的第四比例项.

图 44

4. 求线段 AO 的中点的方法

[作图]利用前面介绍的 1 和 3 作下面的图.

以 O 为圆心，以 OA 为半径画圆. 其次，以 A 为圆心，以 OA 为半径画圆，与前一个圆交于 C 点.

以 C 为圆心，以 OA 为半径画圆，与最初的圆交于 D 点.

以 D 点为圆心，以 OA 为半径的圆，与最初的圆交于 A' 点.

以 A' 为圆心，以 AA' 为半径的圆，与第二个圆交于 S 点.

[238]

图 45

以 S 为圆心，以 SA 为半径的圆，与最初的圆交于 T 点. 又以 T 点为圆心，以 TA' 为半径的圆，与该圆的交点为 X，那么，X 就是所求的中点.

这样，玛斯克罗尼只允许在使用圆规的条件下完成了初等几何学中的很多作图问题.

第5节 椭圆问题

把 Elipse 翻译成椭圆，是从中国雍正元年(1723 年)出版的梅文鼎(1633— 1721)《历算全书》开始使用这个名称①的. 椭是有“切割的木柱”的意思，因此，椭圆之名可能来自“被切割的木头的截面”.

在《历算全书》传入日本之前，日本的数学家已经注意到了椭圆. 是田地的实际的形状. 因此，一般地，把椭圆叫做“饭柜”或者“平卵形”，但关孝和把椭圆叫做“侧圆”. 在江户时代大多数人

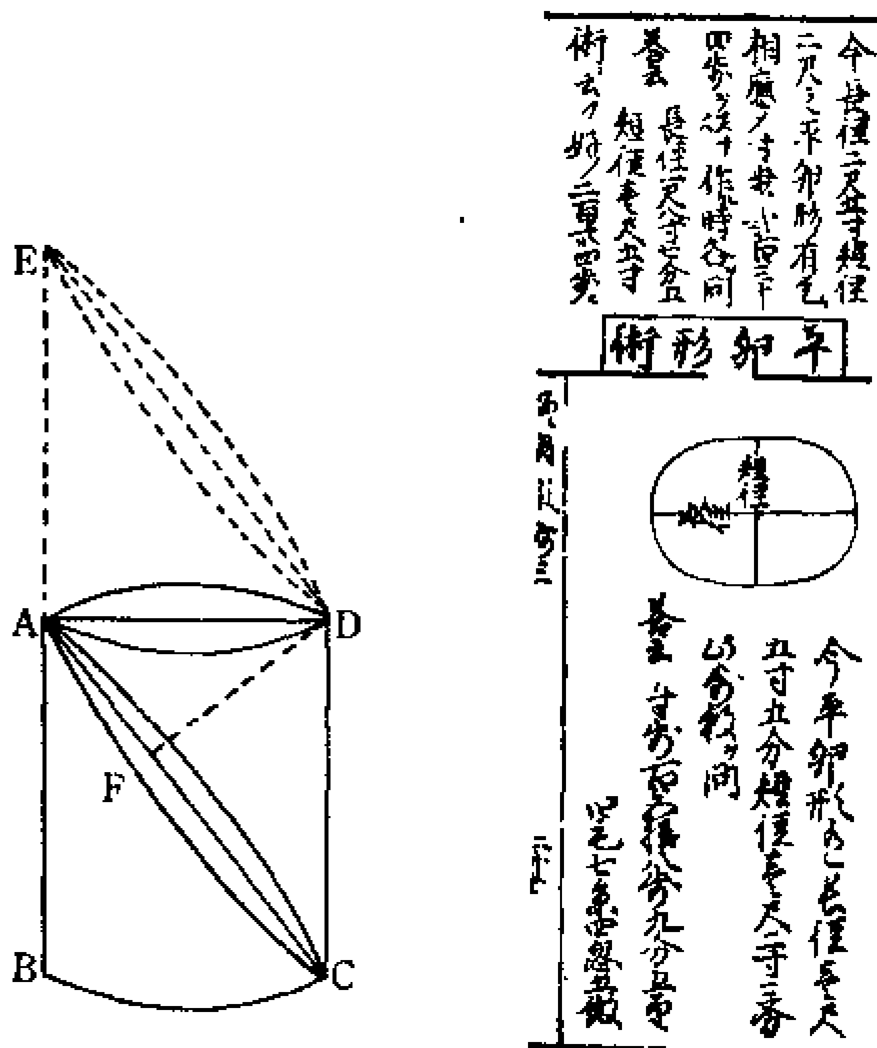


图 46

① 早在明末《恒星历指》(1631 年)中已用“椭圆”一词.

都叫做“侧圆”，到明治时期后叫做椭圆.

设椭圆的长径为 a，短径为 b，那么

$$椭圆的面积=\frac{\pi}{4}ab.$$

下面介绍关孝和用初等方法证明椭圆面积公式的方法.

首先，将圆柱 $ABCD$ 斜向切开后其截面 AC 就成为椭圆. 设该椭圆的面积为 S. 把切开的圆柱的下半部移到上部上面使它们重叠，然后，就考虑立体 $ACDE$ 就可以了.

$ACDE$ 的底部是椭圆 S，高为 DF，因此

$$ACDE 的体积=S\times DF,$$

故

$$圆柱 ABCD 的体积=S\times DF.$$

然而，圆柱的体积是底面积和高的乘积，即

$$\begin{aligned}圆柱 ABCD 的体积&=(圆 BC 的面积)\times AB\\&=\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2\times AB\\&=\frac{\pi}{4}BC^2\times AB,\end{aligned}$$

故与前式比较得

$$S=\frac{\pi}{4}\frac{BC^2\times AB}{DF}.$$

但是，三角形 ADF 和三角形 ACD 相似，因此

$$AD:DF=AC:DC，又\ AD=BC, DC=AB,$$

故

$$\frac{BC\times AB}{DF}=AC,$$

故

$$S=\frac{\pi}{4}BC\times AC,$$

即

$$椭圆的面积=\frac{\pi}{4}(长径)\times(短径).$$

这样，很容易地求出椭圆面积，但成功地求出椭圆周长是很晚的事.

下面的照片(图 47)是从《和算书》中引用的椭圆周长的计算. [240]

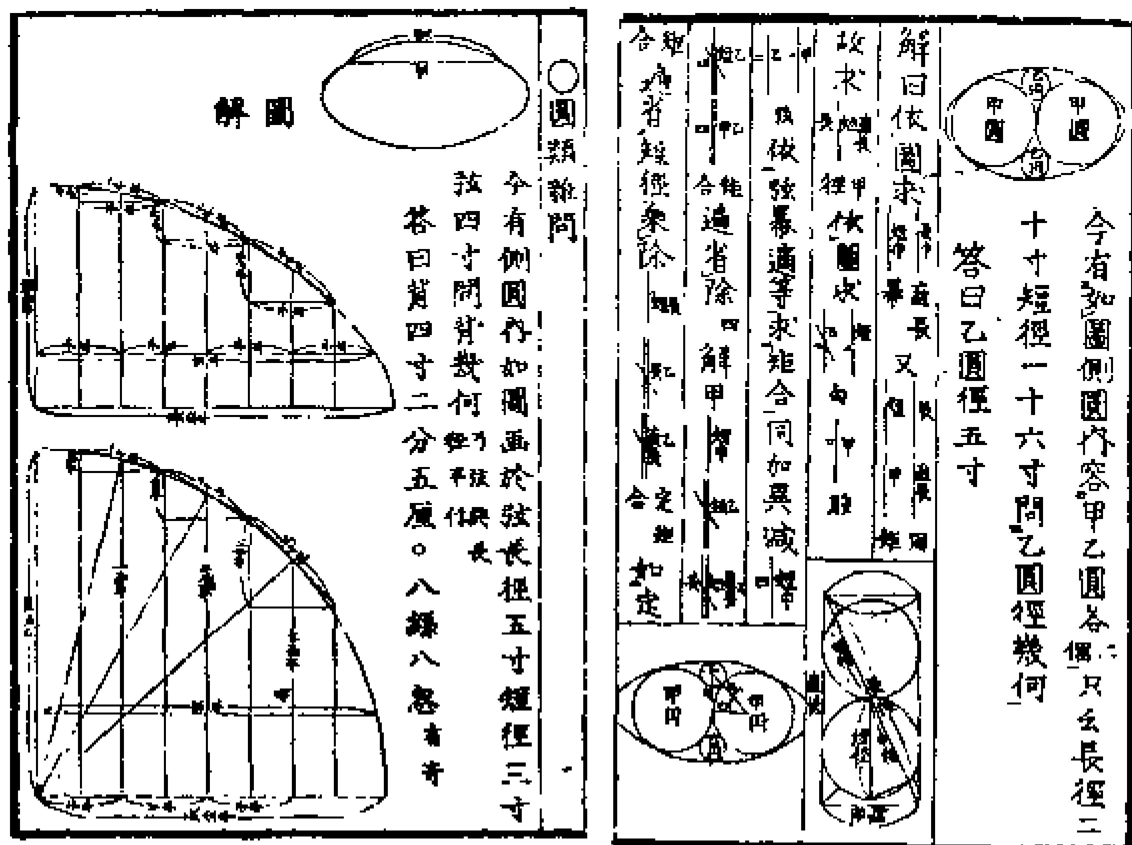


图 47 引自《和算书》，求椭圆周长；引自《和算书》，椭圆性质的研究.

上面照片右侧的内容为，和算家把球内接于圆柱，利用其截面，研究了椭圆的各种性质.

$$椭圆周长=\pi a\left(1-\frac{1}{2^2}p-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}p^2-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}p^3-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}p^4-\cdots\right).$$

这里，长径$=a$，短径$=b$，

$$p=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right).$$

第6节 填棋子游戏

1. 填棋子游戏



图 48 摘自环中仙《和国智慧较》.

在棋盘上以若干形式填棋子，有下面的游戏规则，把棋子全部填在棋盘上.

i) 从任何位置都可以开始填棋子.

ii) 沿着格的方向填棋子(不能斜的方向填).

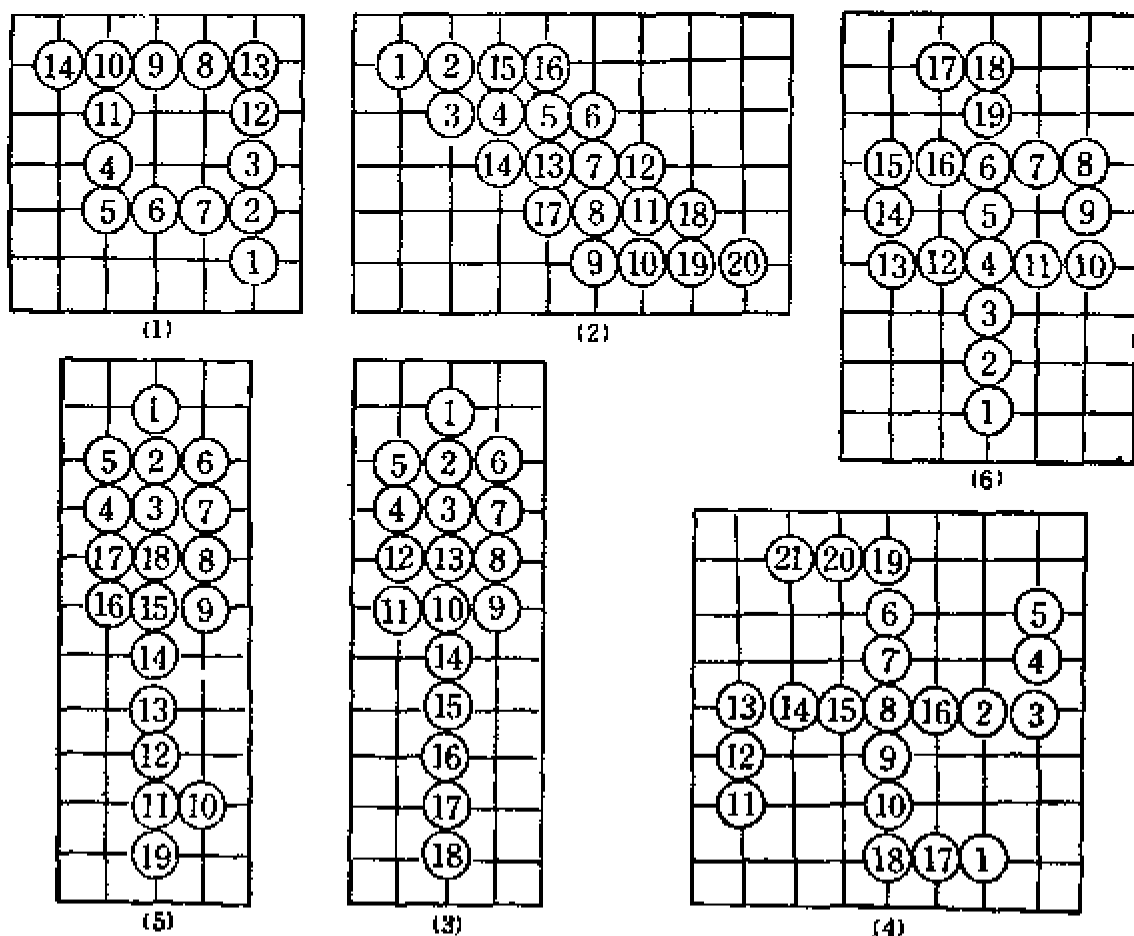
iii) 不能直接往间填棋子.

该游戏被称为填棋子游戏(在日本语中叫做“拾物”或“捉物”游戏),是很早以前传下来的游戏.该游戏的要点在于能够创 [241] 设思考价值的问题.解答前人提出的问题,以序号的顺序填棋子就可以了.

(1)~(5)是享保12年(1727年)出版的环中仙《和国智慧较》中的游戏,(1)是“枡”.古代的大型枡有过把手.(2)是“八桥”,(3)是“矢之羽”,(4)是“十字”,(5)是“部分根矢”. [242]

(6)~(9)是宽保3年(1743年)出版的中根彦循《勘者御伽双纸》中的游戏.(6)是“中”字.(7)是“井”字,(8)是“五”字.(9)是“九”字.

(10)是明治12年(1879年)出版的福田理轩《算法玉手箱》中的游戏.是当时的新知识中的文字“Y”的形状.



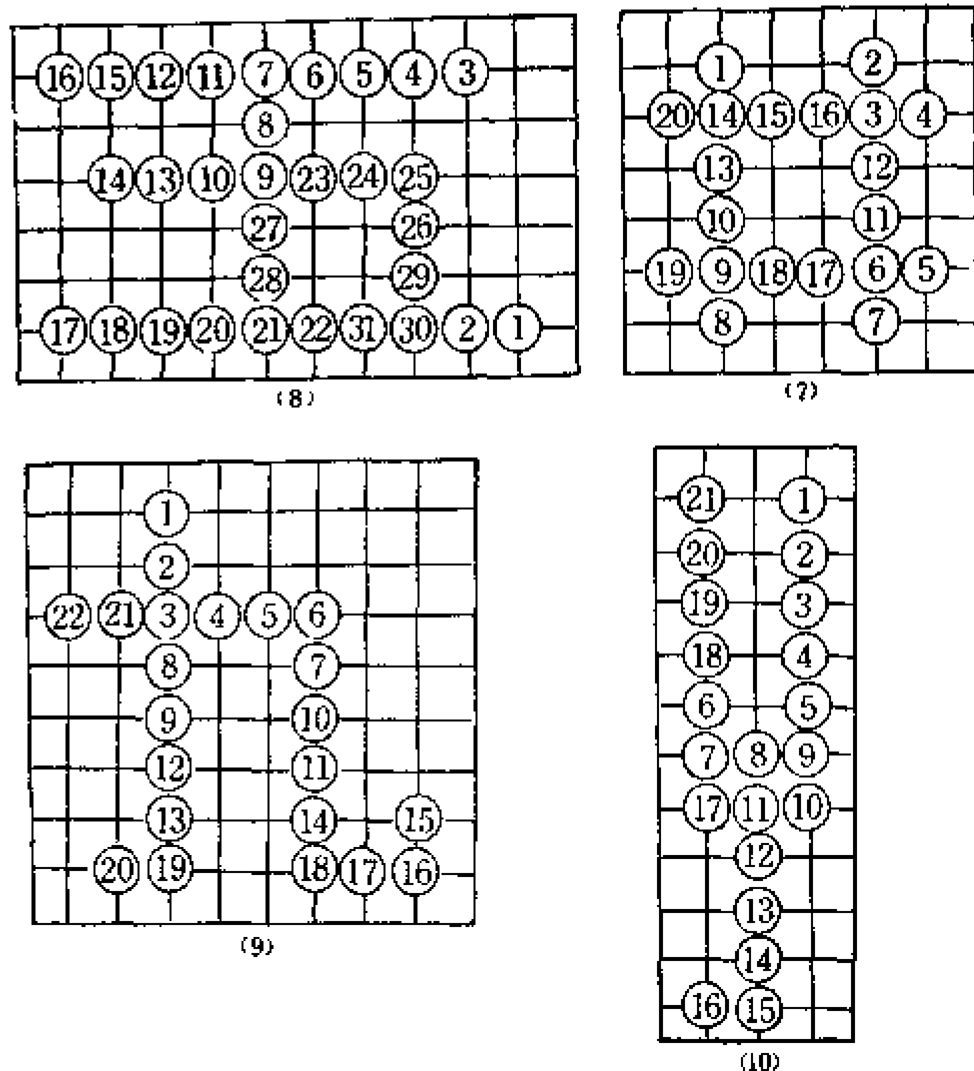


图 49

2. 枡形拾物

将 18 个棋子按图 50 所示排列，从左上角开始排列，向横和纵方向进行，当填完全部棋子时，应该如何排列？但不能返回原路，也不能向斜进行. 该问题有很多解答，问共有多少个解答方法？对此，浦田繁松氏给出了下面的解答. 根据把最初和最后的棋子按直线排列的个数，分别以 2－1式、2－2 式的形式排列. (24)为 1，2，3 和三条直线连接在一起，最终连接

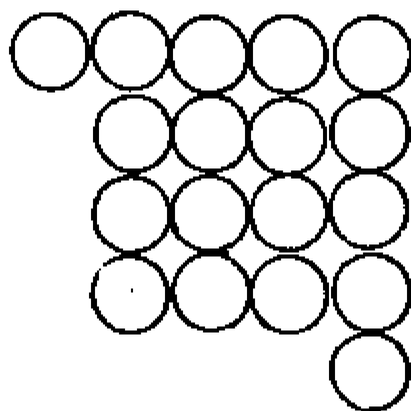


图 50

17 和 18，因此，当作 3－2 式[①].

(1)

1	2	14	15	16
	3	4	5	17
	12	13	6	7
	11	10	9	8
				18

(2)

1	2	14	15	16
	3	13	12	17
	4	7	8	9
	5	6	11	10
				18

(3)

1	2	15	16	17
	3	4	5	6
	12	11	10	7
	13	14	9	8
				18

(4)

1	2	15	16	17
	3	14	11	10
	4	13	12	9
	5	6	7	8
				18

[244]

(5)

1	2	15	16	17
	3	14	13	12
	4	7	8	11
	5	6	9	10
				18

(6)

1	2	8	9	10
	3	4	5	11
	13	7	6	12
	14	15	16	17
				18

(7)

1	2	10	11	12
	3	4	5	13
	15	9	6	14
	16	8	7	17
				18

(8)

1	2	11	10	9
	3	4	5	8
	13	12	6	7
	14	15	16	17
				18

(9)

1	2	13	12	11
	3	14	15	10
	4	7	8	9
	5	6	16	17
				18

(10)

1	2	14	15	16
	3	4	5	6
	12	13	8	7
	11	10	9	17
				18

(11)

1	2	14	15	16
	3	13	9	10
	4	12	8	11
	5	6	7	17
				18

(12)

1	2	5	6	7
	3	4	9	8
	14	15	10	16
	13	12	11	17
				18

---

① 在(1)、(20)、(22)、(26)前面填入下面 4 个式．这样下面的式总数变为 36 个，式数 2－1 式为 6 个，3－1 式为 8 个．

1	2	14	15	16
	3	4	5	17
	11	10	6	9
	12	13	7	8
				18

1	2	3	15	16
	9	4	10	17
	8	5	11	12
	7	6	14	13
				18

1	2	3	15	16
	13	4	14	17
	12	5	8	9
	11	6	7	10
				18

1	2	3	16	17
	11	4	5	12
	10	7	6	13
	9	8	15	14
				18

（松田道雄）

[245]

(13)

1	2	9	8	7
	3	4	5	6
	11	10	15	16
	12	13	14	17
				18

(14)

1	2	9	8	7
	3	4	5	6
	15	10	11	16
	14	13	12	17
				18

(15)

1	2	13	12	11
	3	14	9	10
	4	15	8	16
	5	6	7	17
				18

(16)

1	2	12	13	14
	3	4	5	15
	10	11	6	16
	9	8	7	17
				18

(17)

1	2	3	15	16
	5	4	14	17
	6	9	10	11
	7	8	13	12
				18

(18)

1	2	3	15	16
	13	4	14	17
	12	5	6	7
	11	10	9	8
				18

(19)

1	2	3	16	17
	5	4	11	12
	6	9	10	13
	7	8	15	14
				18

(20)

1	2	3	16	17
	5	4	15	14
	6	9	10	13
	7	8	11	12
				18

(21)

1	2	3	16	17
	9	4	10	11
	8	5	15	12
	7	6	14	13
				18

(22)

1	2	3	10	9
	12	4	11	8
	13	5	6	7
	14	15	16	17
				18

(23)

1	2	3	11	12
	9	4	10	13
	8	5	15	14
	7	6	16	17
				18

(24)

1	2	3	12	11
	14	4	13	10
	15	5	8	9
	16	6	7	17
				18

(25)

1	2	3	14	13
	5	4	15	12
	6	9	10	11
	7	8	16	17
				18

(26)

1	2	3	15	14
	9	4	10	13
	8	5	11	12
	7	6	16	17
				18

(27)

1	2	3	15	16
	10	4	9	8
	11	5	6	7
	12	13	14	17
				18

(28)

1	2	3	13	14
	8	4	7	15
	9	5	6	16
	10	11	12	17
				18

(29)

1	2	3	13	14
	11	4	12	15
	10	5	6	16
	9	8	7	17
				18

(30)

1	2	3	4	5
	13	14	15	6
	12	9	8	7
	11	10	16	17
				18

(31)

1	2	3	4	5
	14	13	12	6
	15	9	8	7
	16	10	11	17
				18

(32)

1	2	3	4	5
	13	14	7	6
	12	15	8	16
	11	10	9	17
				18

以上一组式中,2—1 式有 5,2—2 式有 6,2—3 式有 4,2—5 式有 1,3—1 式有 5,3—2 式有 6,3—5 式有 2,5—2 式有 2,5—3 式有 1,一共有 32 个解.

3. "聪明"的和尚

有叫做"聪明的和尚"的填棋子游戏. 如图 51 所示,作十字形的 33 个格子. 除中央的 17 以外,在所有的格子上填放棋子. 当跳跃填棋子时,取掉被跳跃的那个棋子. 如果适当地进行,那么最后就会只剩下一个棋子. 西方人把这个游戏叫做 Solitary(孤独者)游戏. 因为在中央只剩一个棋子是最理想的,所以又叫做"中央的一人"游戏.

		1	2	3		
		4	5	6		
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
		28	29	30		
		31	32	33		

19 17,16--18,(29 17,17 19),30- 18,27--25,(22 24,24 -26),31 23,(4--16,16--28),7- 9,10--8,12 10,3 11,18--6,(1 3,3--11),(13--27,27 25),(21 7,7 -9),(33 31,31--23),(10 8,8—22,22 -24,24 26,26 - 12,12 -10),5 17

图 51

[246]

在明治以前的日本文献中没有这种游戏. 阿康斯说这种游戏在西方曾经广泛流行过. 据说在莱布尼兹的早期论文中也曾提到过这种游戏. 用数学方法完全解决了. 虽然用数字表示了解答,但把括弧读为 1 次,那么到第 19 次后就剩下一个. Dudeney 说这是最理想的结果.

4. 八皇后问题

西方国际象棋棋盘的问题和上面游戏类似. 叫做"八皇后问题".

在棋盘上,把棋子横向、纵向和斜向排列的游戏,但棋子不能重复. 在最简单的 3×3 的情形下是不可能的. 排列一下立即就会明白

这一点.下面,从 4×4 到 9×9 的情形中,分别举一个例子.

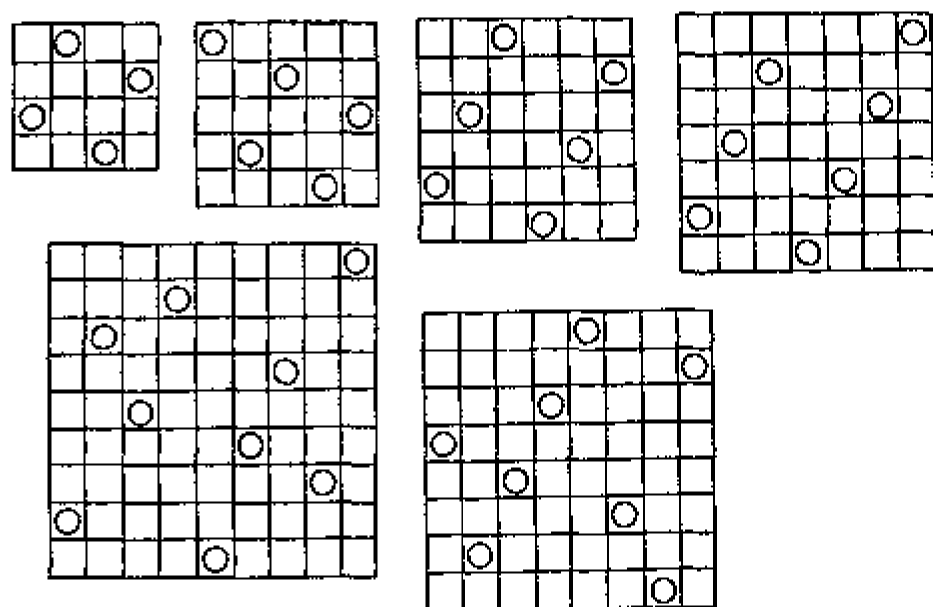


图 52

下面,在 8×8 的情形下,我们看一看在纵、横、斜向不使棋子重复的所有排列情况.当然,这里不包括里外颠倒和向逆向转化
[217] 为一致的情况.关于该问题和"桂马飞"问题,将在别处详细介绍.

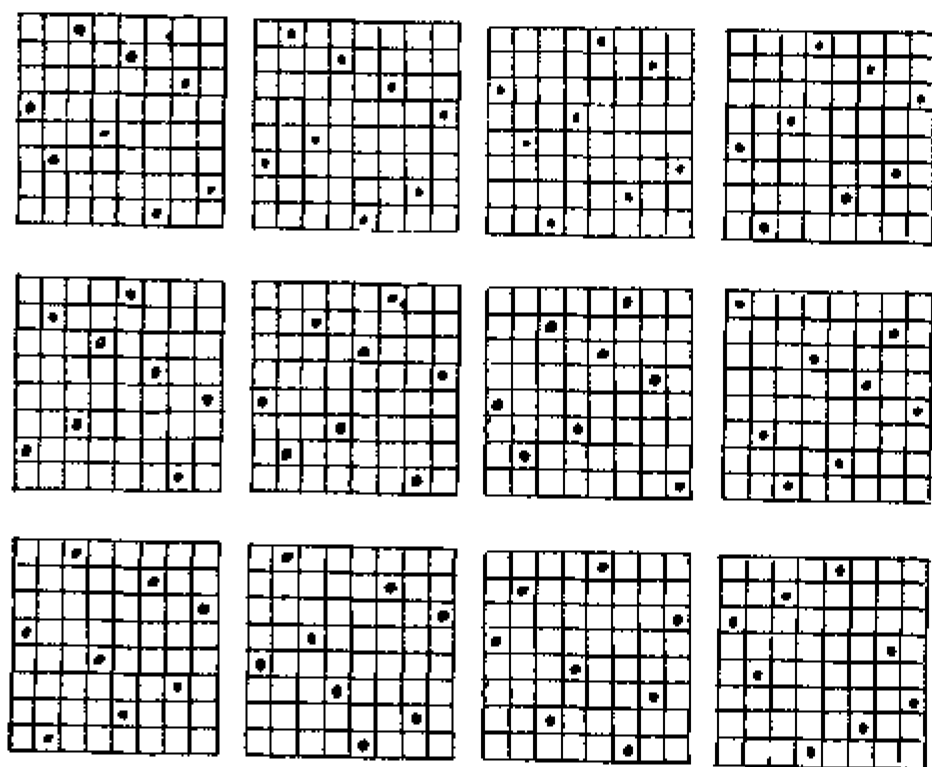


图 53

5. 二人拾棋子的游戏

到现在为止介绍的游戏都是一人进行的游戏.除此之外,还有二人或二人以上共同进行的游戏.下面就介绍环中仙《和国智慧较》中的"填四石"、"四目"、"三星".四石、四目、三星等,是指排列黑棋子、白棋子的方法.

"拾取四棋子.

这是根据人数而进行之拾取棋子游戏.在棋盘上,如图 54,布列黑白棋子.无论先取黑色棋子还是白色棋子,均沿着格取棋子.其后,取黑色棋子即可.取黑色棋子后,白色棋子被取的多.无论对于谁,按顺序取后,均有取胜的可能." [248]

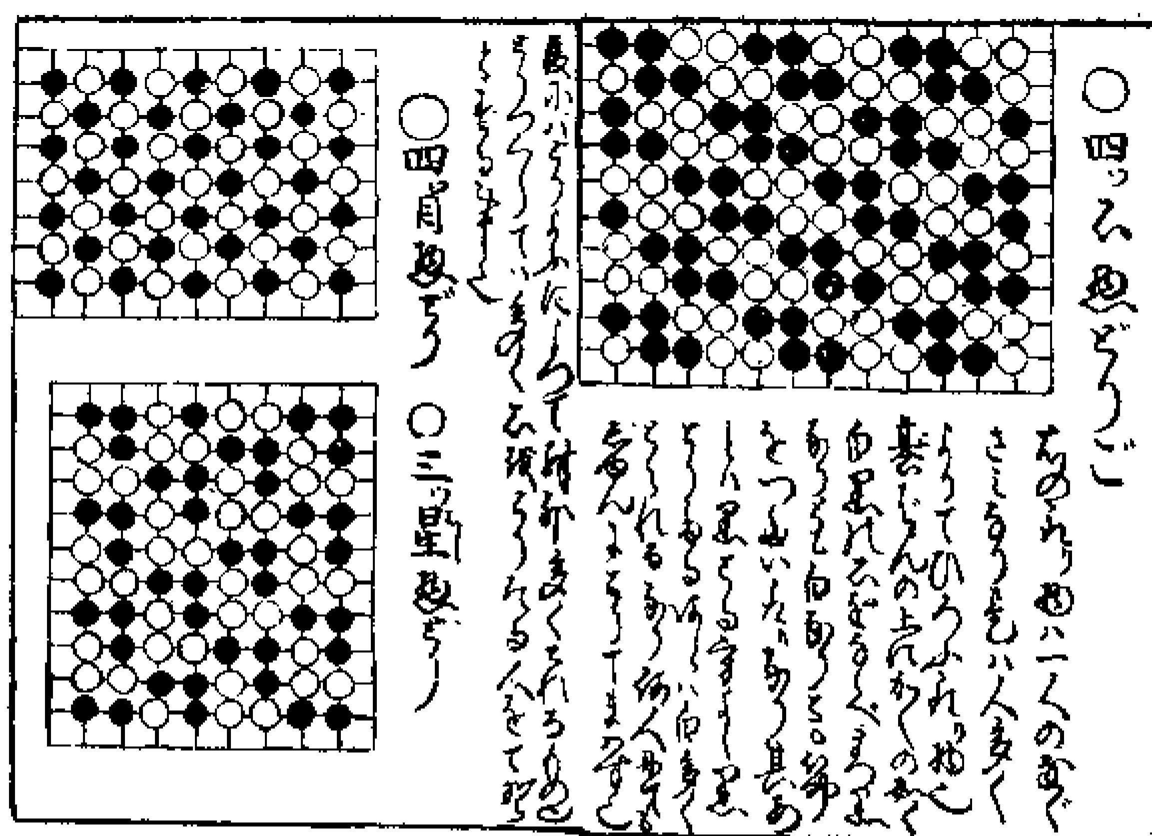


图 54

如此说明,沿着纵、横方向取棋子,如果对手的棋子在,那么不能取.互相反复地取棋子后,取得多的人获胜. [249]

第 7 节　角的三等分问题

1. 三大难题

古希腊数学中出现过非常困难的三个问题，被誉为三大难题. 三大难题对数学的发展起到过积极作用，最近 100 年中三个难题均被证明为“不可能”的.

(i) 只许使用圆规和直尺三等分任意角；

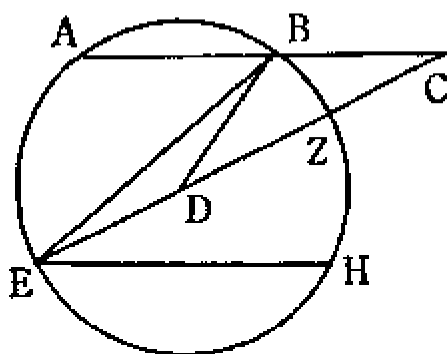
(ii) 倍立方，求作一立方体，使其体积是一个已知立方体的两倍；

(iii) 化圆为方，求作一正方形，使其面积等于一个已知圆.

其中，角的三等分问题与其他两个问题不同，具有初等数学意义，因此，这里介绍一下前人的解答.

2. 阿基米德的方法

最初对这个问题给出解答的人是古希腊的 Hippias of Elis. 据说，他利用某种曲线解答该问题，但并没有流传下来.



[250] 图 55

其次，研究该问题的人是阿基米德. 阿基米德的思考方法是通过帕普斯(Pappus)的研究传播下来的.

延长以 D 为圆心的圆的弦 AB，取 BC，使其等于半径. 引弦 AB 的平行线 EH，那么，就得到如图 55 的结果，

圆心角 BDZ＝圆周角 DEH，

从而有

2 弧 BZ＝弧 ZH，

从而有

2 圆周角 BED＝圆周角 DEH，

于是,就得到角 BEH 的$\frac{1}{3}$.

阿基米德用这种方法思考三等分一个角,但相反地,当确定了角 BEH 时,点 C 的轨迹成为抛物线,因此,明白了用这种方法不能三等分一个角.

下面的问题与阿基米德的方法有密切相关.

引与三等分的角 ABC 的一边 BF 的平行线 AD(图 56).

利用规尺的一边,通过 B 的直线上取 E,使

$$ED=2AB,$$

则有

$$2\text{ 角 }DBF=\text{角 }ABD.$$

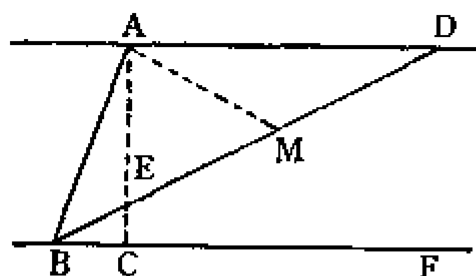


图 56

这种利用规尺一边的作法,在初等作图中是不允许的,也是不准确的.

3. 用折尺作图

(i) 如图 57,作了宽($AF=ED=CD$)为确定的折尺后,就会简单地、正确地三等分一个角.特别是折尺的 ED 的长度必须是一定的宽度,但 AB 要长一些为好. [251]

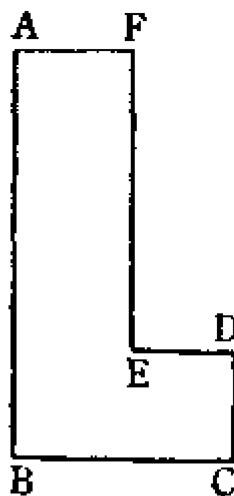


图 57

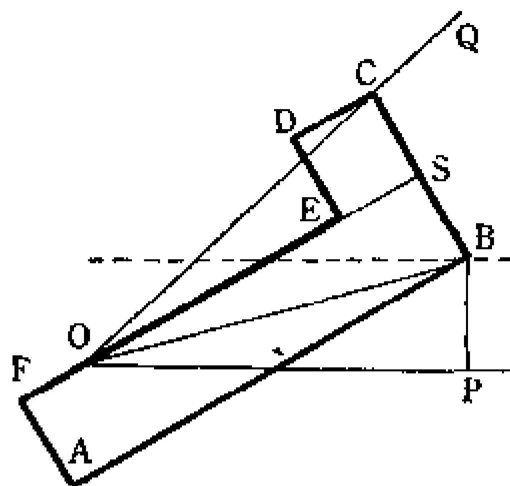


图 58

引角 POQ(要三等分的角)的一边 OP 的平行线,使它们的距离等于折尺的宽度,在这个平行线上置折尺的 B 点,顶点 O 在 EF 上,C 在 OQ 上,如按上述要求把最初作的折尺如图 58 所示那样放置就可以了.

其理由为,三个三角形 BPO,BOS,SOC 全等.

(ii) 前面作的图是使用了特别制作的折尺,实际上根据直角的性质用折尺就能够三等分一个角.即便不是用折尺而用三角尺也可以做到.(以便容易理解,图 59 中没有画出折尺的图形,只简单地画了 OMN).角 RPS 是要三等分的角.

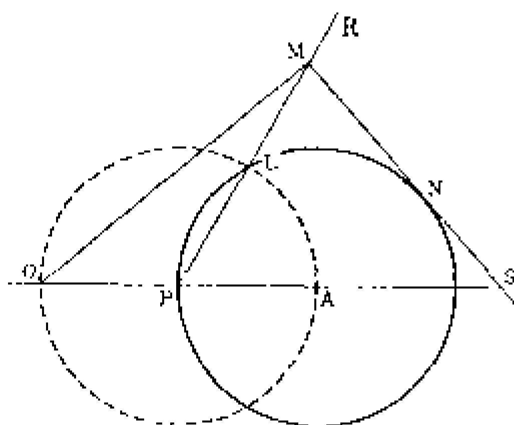


图 59

取 SP 上的一点 A,以 AP 为半径,以 A,P 为圆心作圆.设圆 P 和 SP 的延长线的交点为 O.使 O 点落在折尺的边上,且使折尺一边切于圆 A,且折尺 M 的顶点落在 PR 上.那么

$$角\ OMP=\frac{1}{3}角\ RPS.$$

因为,要注意到 2 角 LMP=角 LOP 就容易理解了.

4. 海尔梅斯的圆规

实际上,关于三等分角的问题,海尔梅斯(Hermes)在 50 年前提出了海尔梅斯圆规的问题.

[252] 首先,说明其原理.

以角 AOB(要三等分的角)的顶点 O 为圆心画圆.在一根尺上取两点 P,R,使 $PR=OA$.把尺子如图 60 所示放置,则

$$3\ 角\ RPO=角\ AOB.$$

容易证明这个结论的.

图 60

图 61 海尔梅斯圆规

该原理中，A，R 在圆周上，P，A 和 R 在同一条直线上就可以了．把它表示成能够简单作图的形式，这就是海尔梅斯圆规（图 61）．

5. 帕斯卡的研究

如果使用哲学家和数学家帕斯卡以研究某种曲线为目的而制作的工具就会三等分一个角．

如图 62，

$CE=EO=OF$．

E，O 是自由旋转的，F 在 ED 上运动的点．把它放置在要三等分的角 AOB 上，使 A，O，C 在同一条直线上，OB 和 OF 重合．于是立即看出

$$3\text{角 } ACD=\text{角 } AOB.$$

图 62

6. 伸缩绘图器的方法

利用伸缩图形的工具，也能够将一个角三等分．在要三等分的角 AOB 的两边上取点 A，B，使 OA，OB 等于伸缩的平行四边形的一边，如图 63 放置，那么，伸缩绘图器的一角，就等于$\frac{1}{3}$角 AOB．

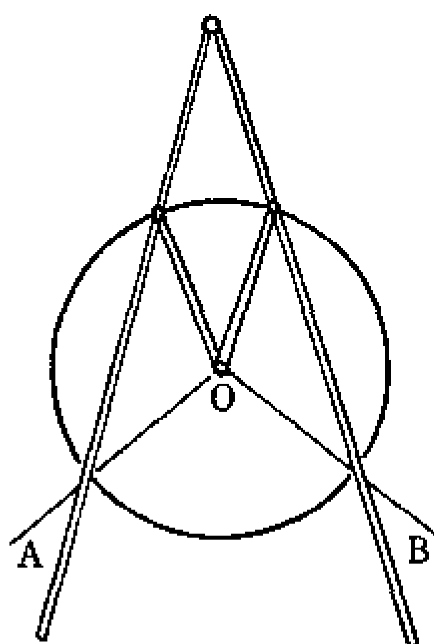


图 63

据说，著名数学家塞瓦(Ceva)发明了伸缩绘图器. 人们应用伸缩绘图器，制作了将角三等分起来非常方便的工具. 下面只介绍其中的两个原理.

图 64 的左侧是

$OA=OB=OC=OD=EA$

$=EC=FB=FD.$

连接 8 个木片，E、F 是可以自由出入的东西.

图 64 的右侧图是更方便的. 如图，是组合两个相等的菱形的图形. 这样，正如用点线所表示的那样，角被三等分.

[254]

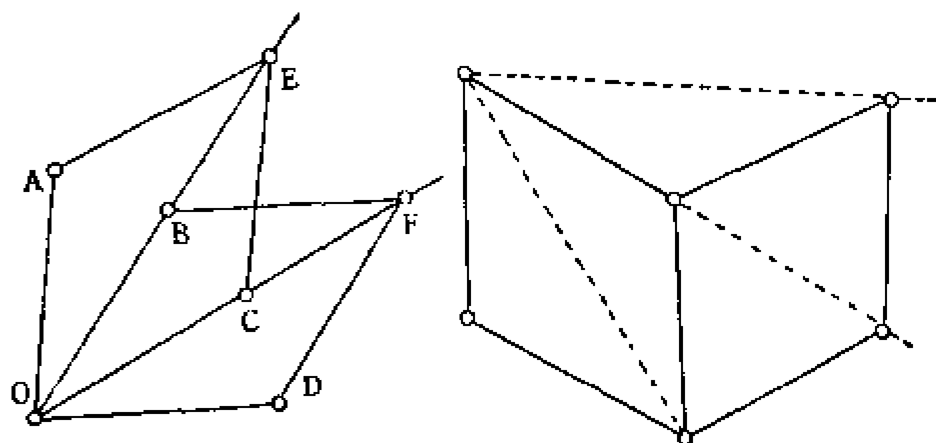


图 64

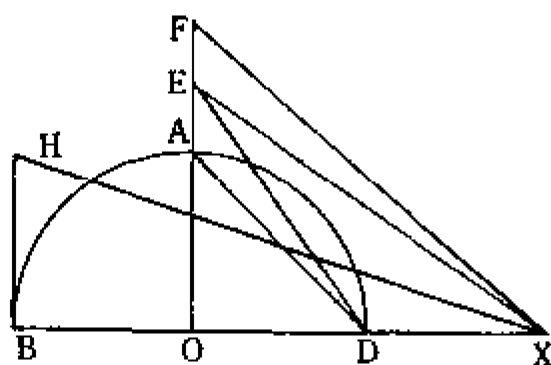


图 65

在图 65 中，

如果取

$$1=BH=OB=OD=DX,$$

$$OE=AD, OF=DE,$$

则

$$OA=\sqrt{1}=1.000,$$

$$DA=\sqrt{2}=1.414,$$

$$DE=\sqrt{3}=1.732,$$

$$DB=\sqrt{4}=2.000,$$

$$XA=\sqrt{5}=2.236,$$

$$XE=\sqrt{6}=2.449,$$

$$XF=\sqrt{7}=2.645,$$

$$2OE=\sqrt{8}=2.828,$$

$$XB=\sqrt{9}=3.000,$$

$$XH=\sqrt{10}=3.162.$$

第8节 七桥问题

“一笔画”问题自古以来一直是引人注目的问题.

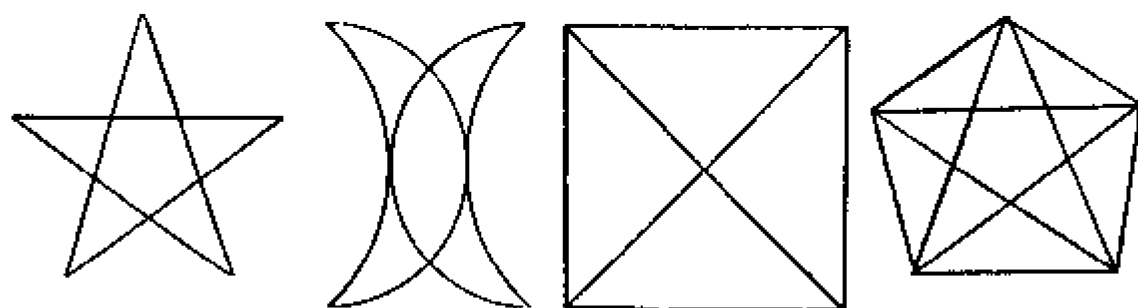


图 66

这四个图形中的第三个图形为四边形的情形下，一笔画是不可能的. 四边形的四个顶点，都与 3 条线路结合在一起. 如果 [255]
有 3 条线路出发的顶点只有 2 个，那么一笔画是可能的. 如果变

成 4 个以上就不可能了.实际上,当一笔画作图时,使“一笔画”从 3 个(一般的是奇数个)顶点出发,回到其他的 3 个(一般的是奇数个)顶点就可以了.

这个原理非常简单,但却作为一个实际问题,曾经出现过不能判断的情况.

过去,德国哥尼斯堡的街里有如图 67 的地势,河上架着 7 座桥.

当时,市民中出现了如下话题:“有 7 座桥,问是否散步者走过每一座桥而且只能走过一次而走遍 7 座桥回到原来的出发点?”

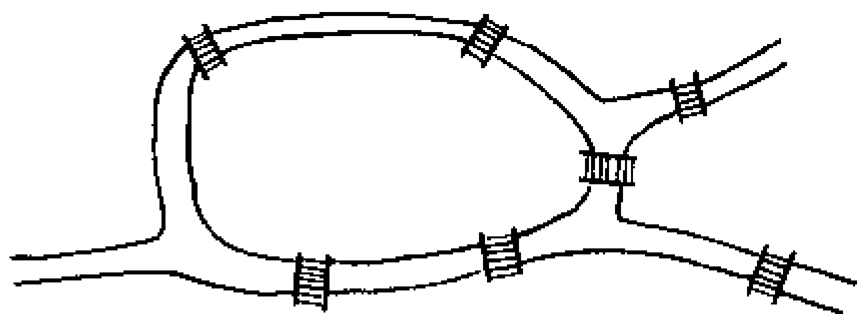
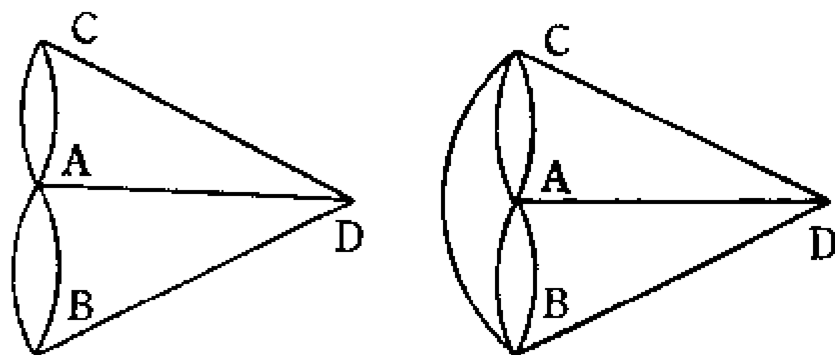


图 67 哥尼斯堡七桥.

著名数学家欧拉给出了该问题的严格的数学论证,并于 1736 年向列宁格勒[①]科学院提交了论文,由此而得名为“7 桥问题”.



[256]

图 68

在这种地势中,连接全部道路,就转化为上面的简化图(图 68).由于问题在于走完全部道路,所以,这和一笔画问题是

① 现为俄罗斯的圣彼得堡.

一致的. A 点上 5 条道路相遇, B,C,D 三点上都是 3 条道路相遇. 由于奇数条道路相遇的地方有 4 处,所以一笔画是不可能的.

如果,作第八座桥与 B,C 连接,那么,在 B,C 上就会有 4 条道路相遇. 因此,如果使 A 和 D 作为出发点和终归点,那么,一 [257]
笔画是能够实现的.

在日本也出现过同样的问题. 弘化 2 年(1845 年),武田真元写的《真元算法》[①]中有如下论述:

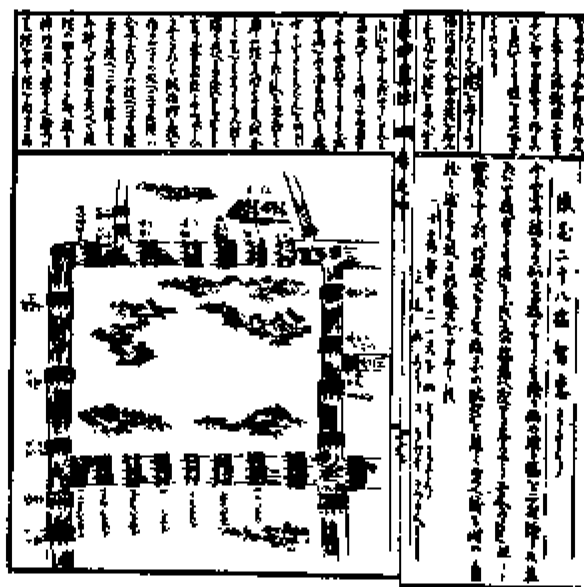
"浪华二十八桥智慧渡

今,如图 69,有二十八座桥. 由任意一桥开始渡桥,且不能两次渡过同一座桥,如何绕路均费劲. 终归原来的出发点. 但是,与此渡桥外,即使没有密传书,好好想浪花之地理渡桥时自然地能渡桥也. 故,略密传书."

由《真元算法》的说明可以看出,似乎在幕末的大阪曾经有过这样的桥. 如图 70 所示.

---

① 图 68 是引自模仿《真元算法》的《算法重宝记》(1851 年). 该书中补充了《真元算法》中走完若干桥梁的问题(如下补充图). 但两者的桥梁数不同,前者为 28 座,后者为 29 座. 无论是哪种情况,都要求一次走完全部桥,并且不允许重复过同一座桥.



补充图.



图 69 《真元算法》中二十八桥.

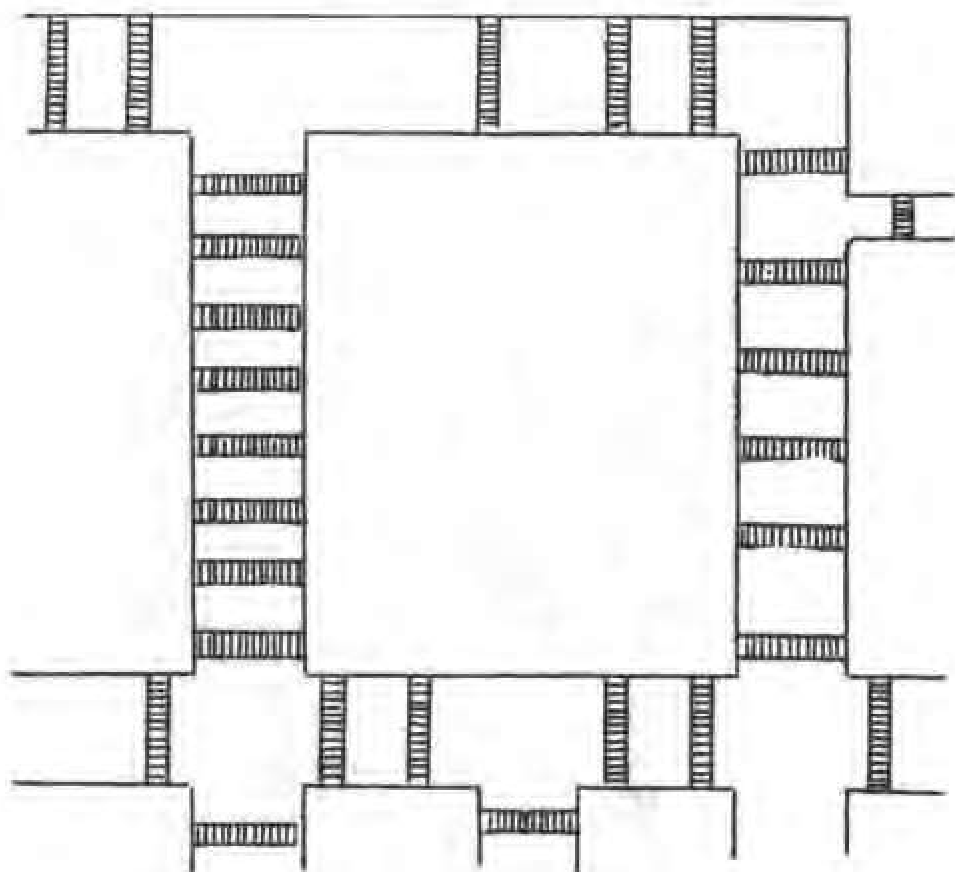


图 70 《真元算法》中二十八桥的简化图.

第9节　镶嵌图案

1. 同种正多边形

如何用大小相同、同类正多边形镶嵌整个平面？首先，来考虑正 n 边形. 正 n 边形的一内角大小为

$$180^\circ \times \frac{n-2}{n}.$$

又因为对于一点的周角为 360°，所以为了用正多边形恰好镶嵌平面，下式必须有整数结果：

$$360^\circ \div \left(180^\circ \times \frac{n-2}{n}\right).$$

简化此式得

$$\frac{2n}{n-2}\text{，即 } 2+\frac{4}{n-2}.$$ [258]

这里的 $\frac{4}{n-2}$ 为整数就可以了. 只有在 $n=3,4,6$ 的情形下该式为整数. 把这值代入到上式计算得

$$n=3: \frac{2n}{n-2}=6,$$

$$n=4: \frac{2n}{n-2}=4,$$

$$n=6: \frac{2n}{n-2}=3.$$

这就是在一点周围能相遇的正多边形的个数. 因此，用相同大小的同类正多边形制作的镶嵌图时，只限制使用正三角形、正四边形、正六边形（如图 71）.

2. 大小不同的同类图形的组合

即便是正三角形和正四边形的大小不同，也能够组合成镶嵌图. 用图 72 来表示.

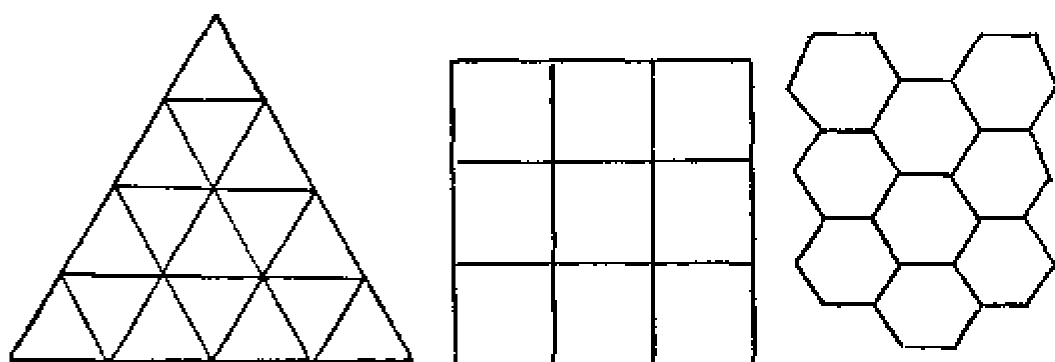


图 71

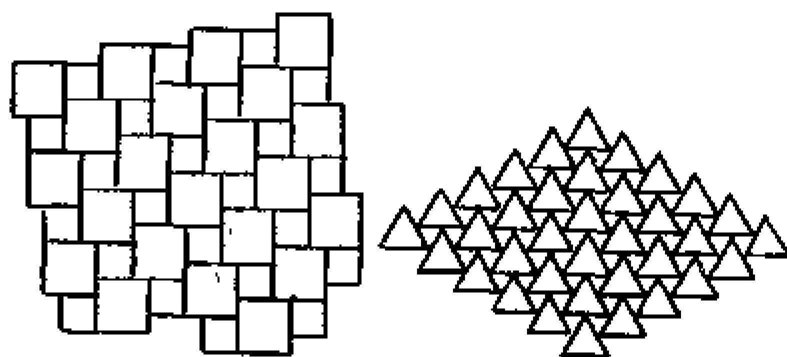


图 72

另外,长方形中,砖的宽和长的比为 1:2,如图 73 所示,可以
[259] 组合成镶嵌图,这是显然的.但我们又可以作出 1:3的组合图.

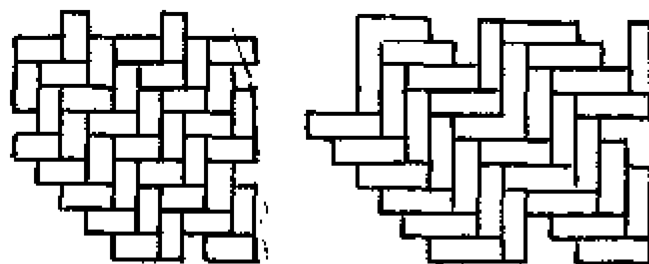


图 73

3. 不同种类的正多边形的组合

研究这个问题时,要考查在一个点的周围放置什么正多边形为合适的情况.

(i) 首先,我们考察在一点周围放置三种正多边形的情形.

在这个情形下,设三种正多边形的边数为 n_1, n_2, n_3,又设它

们的一角分别为 O_1, O_2, O_3，则

$$O_1 = \frac{n_1 - 2}{n_1} \times 180°,\ O_2 = \frac{n_2 - 2}{n_2} \times 180°,$$

$$O_3 = \frac{n_3 - 2}{n_3} \times 180°.$$

由于 O_1, O_2, O_3 为一点周围的角，所以，必有

$$O_1 + O_2 + O_3 = 360°.$$

在该式中代入上面的三个式子，并整理后得

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}.$$

因为 n_1, n_2, n_3 为正多边形的边数，必须是正整数. 在这个条件下，满足这个方程的 n_1, n_2, n_3，一共有 10 组：

*(1) 3,7,42,　　*(2) 3,8,24,

*(3) 3,9,18,　　*(4) 3,10,15,

(5) 3,12,12,　　*(6) 4,5,20,

(7) 4,6,12,　　(8) 4,8,8,

*(9) 5,5,10,　　(10) 6,6,6.

其中，最后的(10)，三个都是正六边形，是特殊情形.

(ii) 再考察在一点的周围放置 4 种正多边形的情形. 这个 [260]
情形与前面的情形完全相同，也可以得到

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1.$$

满足这个式子的 n_1, n_2, n_3, n_4 的值有以下 4 组

(11) 3,3,4,12,　　(12) 3,3,6,6,

(13) 3,4,4,6,　　(14) 4,4,4,4.

其中，最后的(14)是特殊情形.

(iii) 再考查在一点的周围放置 5 种正多边形的情形. 这个情形与前面的情形完全相同，也可以得到

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}.$$

满足这个式子的 n_1,n_2,n_3,n_4,n_5 的值有以下 2 组

(15) 3,3,3,3,6,　　　　(16) 3,3,3,4,4.

(iv) 再调查在一点的周围放置 6 种正多边形的情形下得

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2.$$

满足该式的值只有一组

(17) 3,3,3,3,3,3.

这是前面提到的特殊情形.

一点的周围放置 7 个以上的正多边形是不可能的. 因为,正多边形中最小的是正三角形,其内角为 60°. 当放置 7 个正三角形时,一点周围的角为 420°,大于周角 360°. 正因为这样,即使是正三角形也不可能.

4. 图解

上面求出的 17 种值,只不过是在一点周围放置正多边形的可能性而已. 因此,还需要考察对于每一个情形下能否画出它们图形的问题. 由于这是一件非常繁琐的事情,所以,这里只介绍数学家的研究结果. 在 17 组数值中,带 * 号的 6

[261] 组(1),(2),(3),(4),(6),(9)是不可能的.

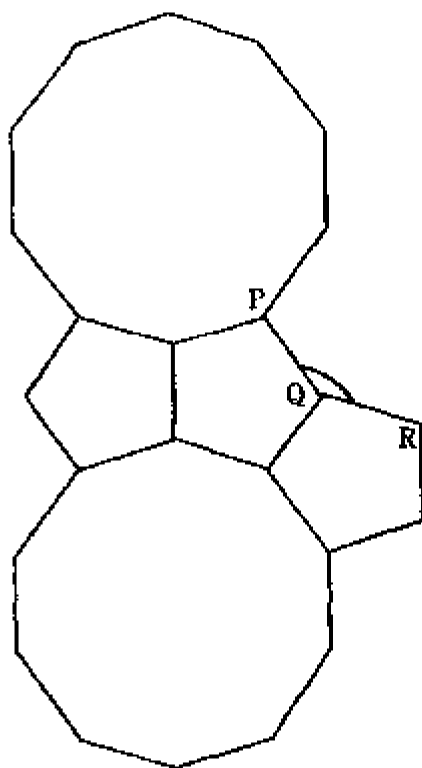


图 74

下面说明其中最简单的(9). 由于(9)是 5,5,10,所以,它是由两个正 5 边形和一个正 10 边形构成,必须作如图 74 的图形. 其中,角 PQR 为 144°. 因为 144°是正 10 边形的内角,所以,这里能够镶嵌正 10 边形,但实际上不能镶嵌正 10 边形. 同理,可以知道其余的(1),(2),(3),(4),(6)是不可能的.

于是剩下 8 组:(5),(7),(8),(11),(12),(13),(15),(16).

下面介绍其中的简单情形.

最简单的是(8).由于(8)为 1,8,8,所以,由一个正方形和两个正 8 边形围绕一点的周围.用图形表示如 75 图的左侧.

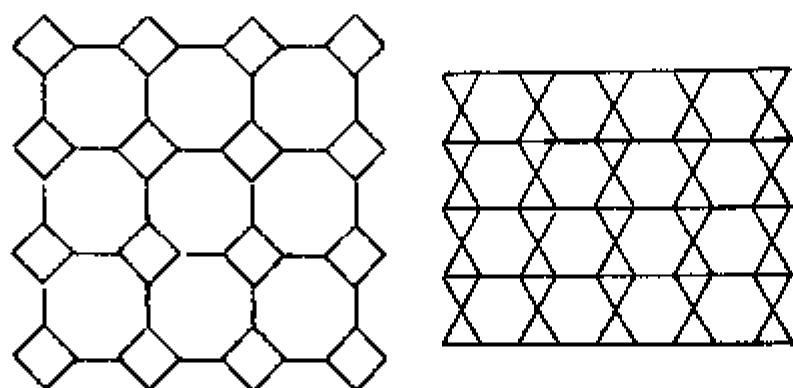


图 75

[262]

(12)为 3,3,6,6,所以,在一点的周围有两个正三角形和两个正 6 边形,如图 75 的右图.

(5)为 3,12,12,所以,在一点的周围有一个正三角形和两个正 12 边形,如图 76 左侧.

(7)为 4,6,12,所以,在一点的周围有一个正方形、一个正 6 边形和一个正 12 边形,如图 76 右侧.

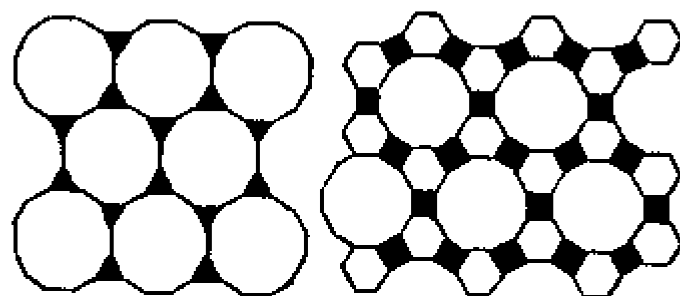


图 76

(13)为 3,4,4,6,所以,在一点的周围集中一个正三角形、两个正方形和一个正 6 边形.如图 77 左侧.

(16)为 3,3,3,4,4,所以,在一点周围集中三个正三角形和两个正方形,如图 77 右侧.

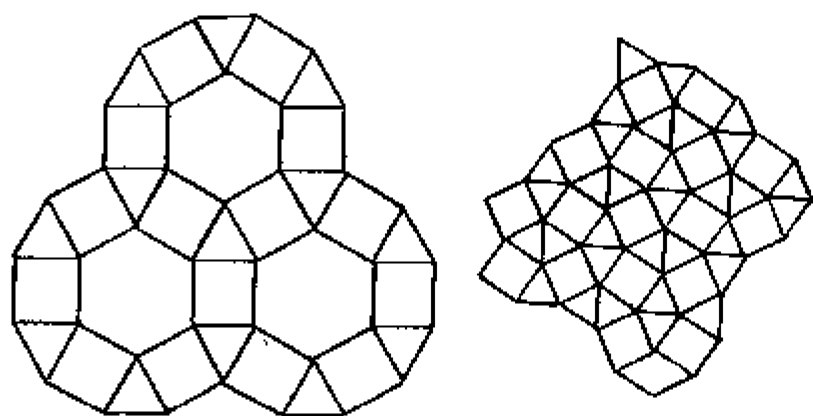


图 77

[263] 最后的(15)为 3,3,3,3,6,所以,在一点的周围集中 4 个正三角形和一个正 6 边形,如图 78 左侧.

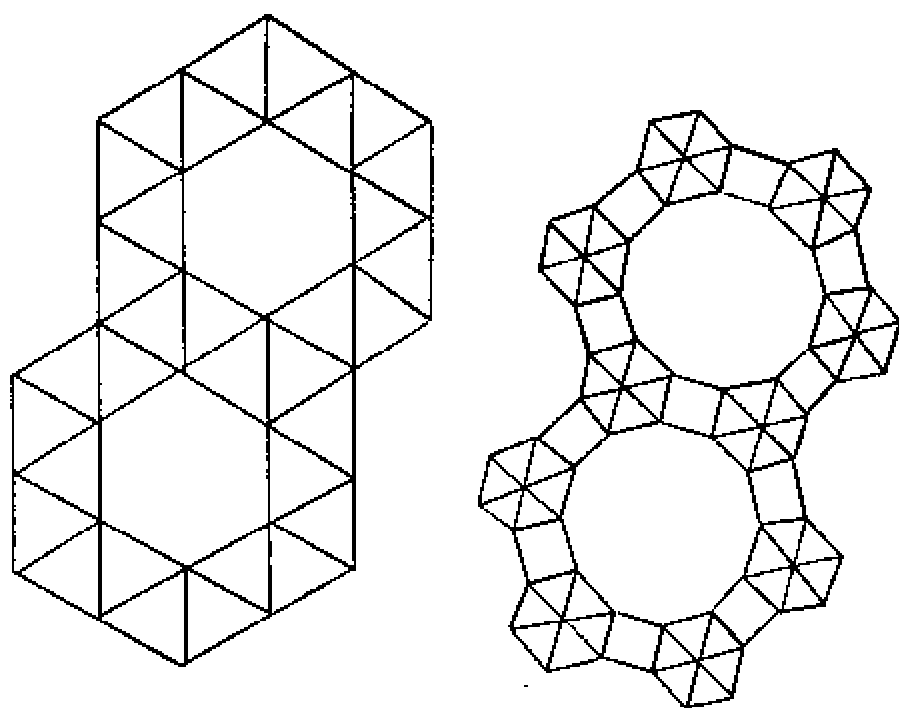


图 78

(11)为 3,3,4,12,所以,在一点的周围集中两个正三角形、一个正方形和一个正 12 边形,如图 78 右侧.

以上介绍了可能的实例,但未必只限于一种情况.

上面介绍了(16)为在 3,3,3,4,4 的情形下的实例.下面再介绍两个实例(图 79):

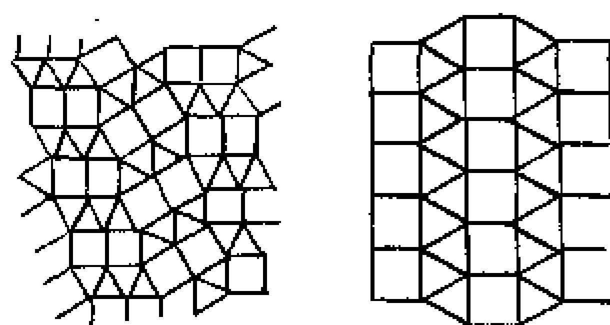


图 79 [264]

最后，再举几个复杂的例子(图 80)：

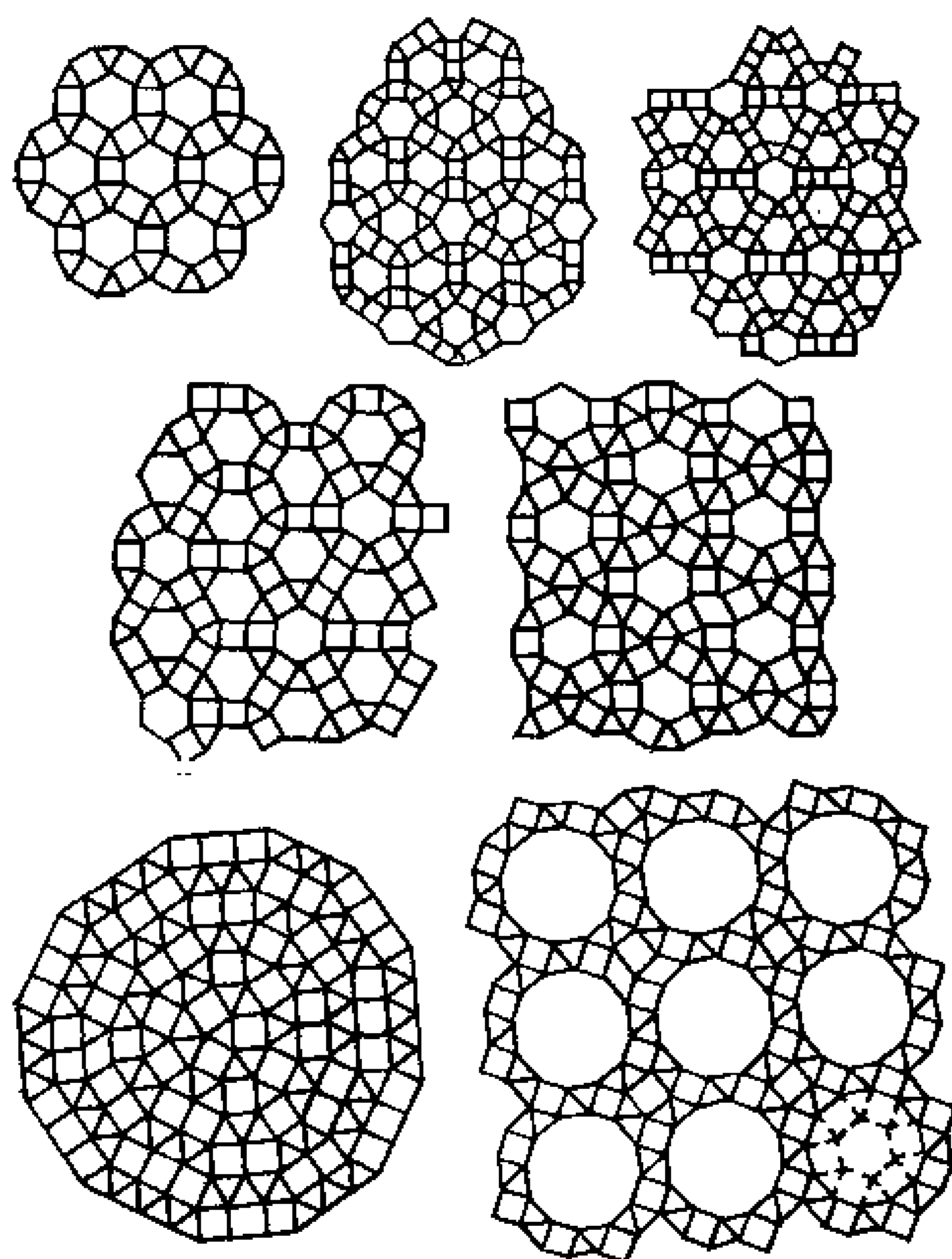


图 80 [265]

第 5 章　图形Ⅱ

第 1 节　杉　成　算

1. 问题的发生

如图 1，计算如山形堆积的草袋总数时，相补一个与此颠倒的形状，就形成平行四边形，其两边分别为 n 和 $n+1$，因此

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

这是众所周知的.

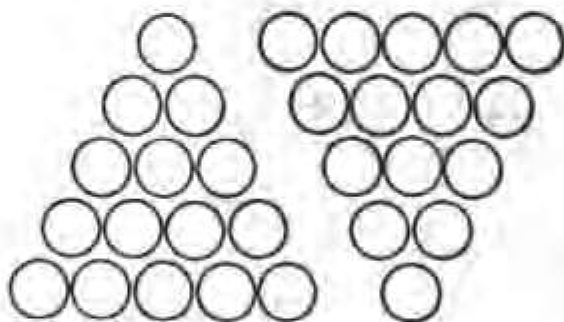


图 1

在日本数学中，把它叫做杉成算、或者叫做杉算. 从侧面看，堆积起来的杉木就呈现为等腰三角形，所以叫做杉算. 在中国古代把等腰三角形叫做圭，学术上叫做圭垛. 垛有堆积的意思. 在中国通俗地叫做茭草，是捆起来的干草堆的形状.

杉成算，不仅有学术上的重要性，而且是早已引起人们注意的问题. 我们先考察其历史渊源.

中国元代数学家朱世杰的《算学启蒙》(1299 年)中有下面的问题：

茭草：$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$；

圆箭：$1+6+2\cdot6+3\cdot6+\cdots+n\cdot6=1+3n(n+1)$； [266]

三角垛：$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$；

四角垛：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

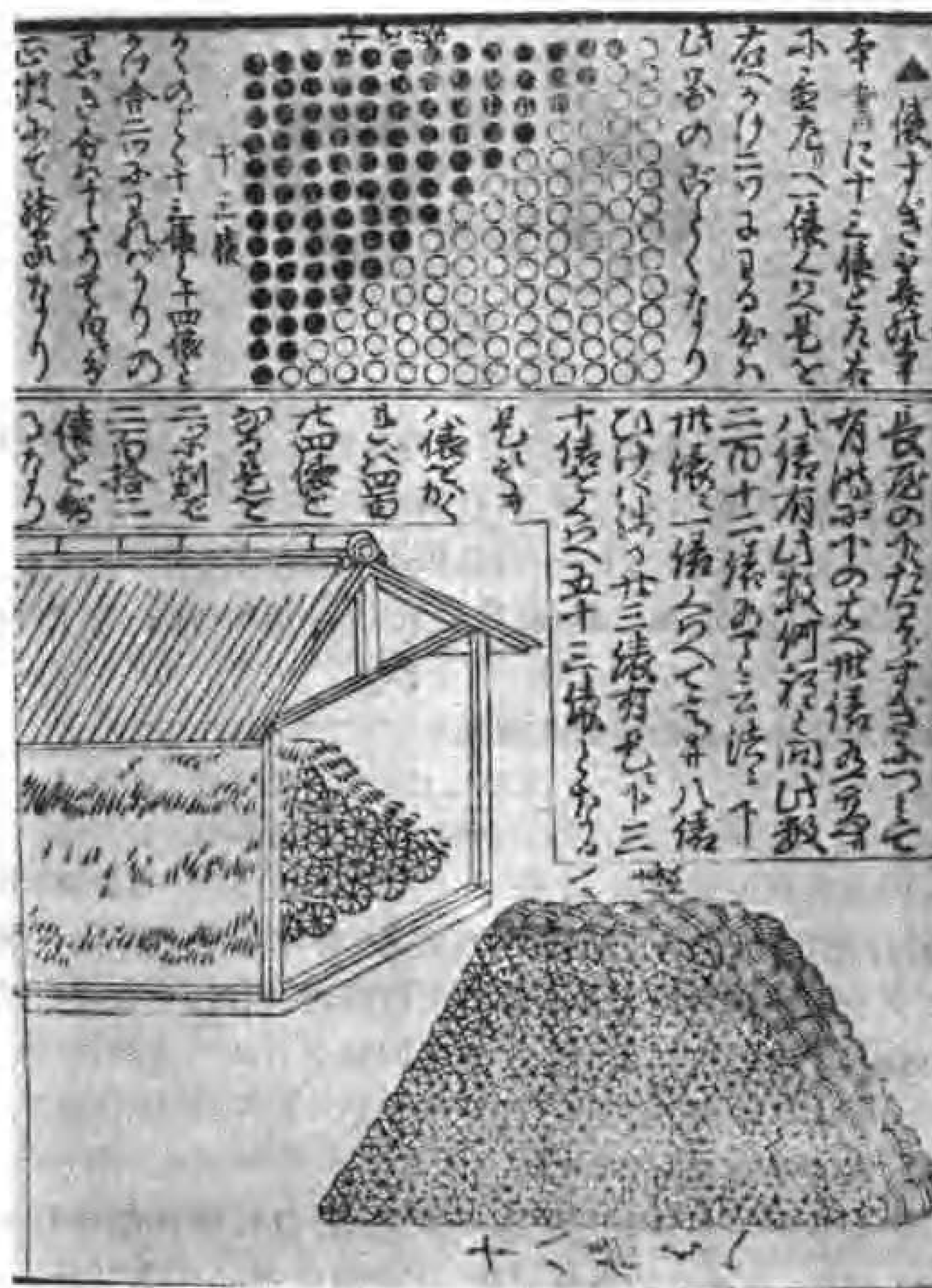


图 2 [267]

这里最引人注目的是圆箭问题. 把竹子捆起来，观察其截面后发现有两种情形. 如图 3，有中心一根和三根两种情形. 它们的个数分别为

$$1,6,12,18,\cdots$$

$$3,9,15,21,\cdots$$

该问题是前者的情形.

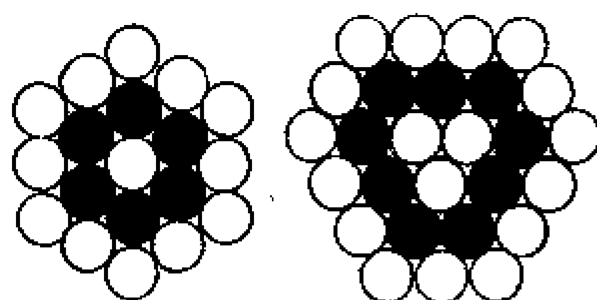


图 3

在日本最古老的数学文献《口游》(请看图)“竹束编”中就有相同的问题，叫做竹束问题. 内容如下：

今有竹束，周围二十一，问总数几. 曰，四十八.

术曰，置周围，加三算，自乘得五百七十六，以十二除，得四十八.

用术表述求总数的公式就是

$$\frac{(21+3)^2}{12}.$$

因为竹束的周围有 21 根，所以其中心有 3 根. 与上述《算学启蒙》中的问题不同. 从历史的角度看，有趣的是在古代中国的算学书中见不到其中心有 3 根竹束的问题. 同时，引人注目的是在《口游》中除竹束问题以外的数学问题只有两三道题.

[268] **2. 问题的进展**

杉成算似乎是从游戏问题中产生的，但杉成算却是数学的基础性问题. 在遥远的奈良时代，从中国引进的数学书籍，一时失传了. 因此，在江户时代的初期，从中国明朝又一次引进了数

学书，终于关孝和建立了日本的数学.

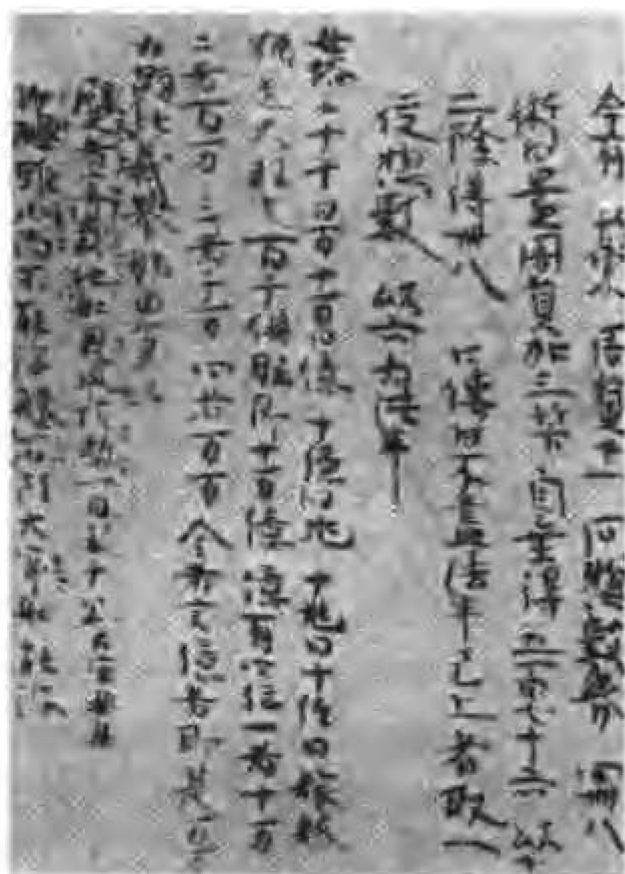


图 4 引自《口游》.

宽永 4 年(1627 年)出版了《尘劫记》第一版，到关孝和出现为止，究竟如何解决杉成算问题的呢?

《尘劫记》中说：

"杉成算之事.

下有十三根杉木. 上面为一根，问此堆杉木总数几何? 答曰，杉木堆有九十一根杉木. 右置十三根，又左亦有十三根，对此加一根成为十四根之杉木堆. 由左向右加，得数一百八十二. 除以二得九十一根."

关于这个问题的图如图 5.

这里的"下"表示底边. 说明的计算方法为

$$13\times(13+1)\div 2=91.$$

"右置，左置"这个句子是用算盘置于左右的意思. 即使是今天也能

[269] 听到老人把解答问题说为"置问题",这是具有 300 年历史的说法.

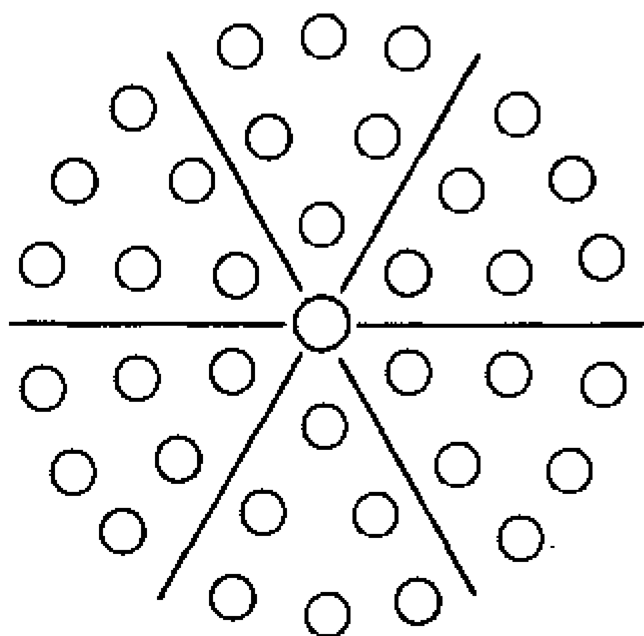


图 5

《尘劫记》之后出现了一部重要著作,它就是万治 2 年(1659 年)出版的山田正重的《改算记》.《改算记》在用各种方法计算杉成算之后,如图 5,用图解方法给出了竹束问题.

$$1,6,12,18,\cdots$$

的正确的求和公式.

《改算记》出版 2 年后,在宽文元年(1661 年)出版的矶村吉德的《算法阙疑抄》中进一步提高了.该书中在给出上述两个问题的解以后,介绍了方锥积、三方锥积、圆锥积的图解,并给出了正确的解.

所谓方锥积是,堆积一边分别为

$$n,n-1,n-2,\cdots$$

个正方形的几何体.即求

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

的总数和的公式.

三方锥是以正三角形为底边,并以每加一层其边数减少一个的方式堆积起来的几何体.即

$$1+3+6+10+\cdots$$

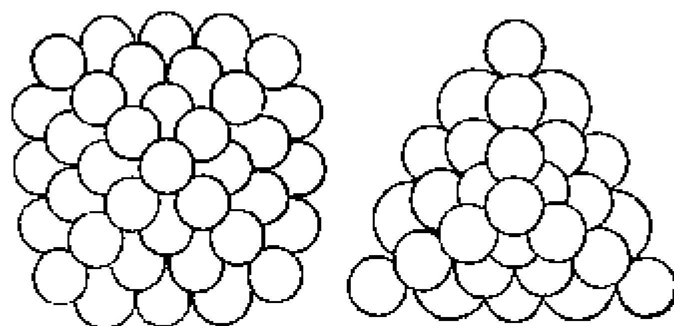


图 6

正确的总和公式为

$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$ [270]

方锥积和三方锥积的底面为正方形和正三角形，底面为圆的锥体就是圆锥体. 即，扩张竹束问题，如果把圆堆积四层，那么，有如右图的形式. 一般地，

$$1+6+2\cdot 6+3\cdot 6+\cdots+m\cdot 6=1+3m(m+1).$$

从 $m=0$ 到 $m=n$ 相加后得

$$1+n+n(n+1)(n+2)=(n+1)^3.$$

砚村吉德给出了这个正确的解：

$$\begin{array}{c}1\\1+6\\1+6\quad+2\cdot 6\\1+6+2\cdot 6+3\cdot 6\end{array}$$

从该书出版的宽永元年，关孝和的研究就开始了. 到那时为止，人们只看到杉成算的图形形式的解答，但其后的 20 年中，关孝和把问题扩展为抽象的、不能用图形解答的问题. 很快就跃居与西方数学媲美的水平. 以下将论述这个问题.

3. 垛术

日本和算的基础是垛术. 和现在的级数有一点差别，一般用堆积方法来思考问题. 最简单的杉成算中也有自然数列

1,2,3,4,5,6,…

将该数列前面的所有项的和制作圭垛.同样,用圭垛的前项和来作三角衰垛.作法如下:

底　　子:	1	2	3	4	5	6	7	…
圭　　垛:	1	3	6	10	15	21	28	…
三角衰垛:	1	4	10	20	35	56	84	…
再乘衰垛:	1	5	15	35	70	126	210	…
[271] 三乘衰垛:	1	6	21	56	126	252	462	…
四乘衰垛:	1	7	28	84	210	462	924	…
……	……	……	……					

用下面公式来表示这些数列的一般项.

圭　　垛: $\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$,

三角衰垛: $\frac{(n+2)(n+1)n}{2\cdot3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$,

再乘衰垛: $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{2\cdot3\cdot4}=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}$,

三乘衰垛: $\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$

$$=\frac{n^5+10n^4+35n^3+50n^2+24n}{120},$$

……　　……　　……

众所周知,二项式定理的系数,即斜向看帕斯卡三角形数时表现出来的公式,这也是和算的基础性公式.这里的底子是1,2,3,…的自然数,但和算家改变自然数的底子,以下列数列为底子研究了数列:

1,3,5,7,9,…

2,4,6,8,10,…

上面介绍的是衰垛或衰垛积,下面将论述方垛.

所谓方垛,就是求自然数的平方、立方的计算.

圭垛积　$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}(n+n^2)$.

平方垛积　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}(n+3n^2+2n^3)$.

立方垛积　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}(n^2+2n^3+n^4)$.

……　　……　　……　　……

一般地，能求出下面形式的式子的和：

$$1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r.$$ [272]

现在再介绍衰垛和方垛的关系.

作以 1,2,3,…作底子的平方垛和平方垛积.

平方垛	1	4	9	16	25	36	…
平方垛积	1	5	14	30	55	91	…

再作这个平方垛积和前面介绍的圭垛积(1,3,6,10,15,21,…)的相应的项的差，得

$$0\quad 2\cdot 1\quad 2\cdot 4\quad 2\cdot 10\quad 2\cdot 20\quad 2\cdot 35\quad \cdots$$

其中的 1,4,10,20,…就是前面介绍的三角衰垛积. 故，能够求出平方垛积：

$$
\begin{aligned}
\text{平方垛积(底子 }n\text{)} &= 2\times\text{三角衰垛积(底子 }n-1\text{)} \\
&\quad +\text{圭垛积(底子 }n\text{)} \\
&= 2\times\frac{(n+1)n(n-1)}{2\cdot 3}+\frac{(n+1)n}{2} \\
&= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.
\end{aligned}
$$

用这个方法可以求出平方垛积公式

$$1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r.$$

日本数学家关孝和在世界上最早得出了这个公式. 这个公式叫做贝努利数，认为是高不可攀的内容，在学校数学教育中不介绍这些内容.

我觉得有必要说明关孝和的这个方法.

4. 关孝和的研究

关孝和在《括要算法》中介绍了(1)一般公式的求和方法.

首先,用如下形式写$(1+1)^n$的展开式的系数.在西方叫做帕斯卡三角数.在东方,朱世杰的《四元玉鉴》(1303年)等著作

[273] 中很早以前就开始使用了这个方法.

1	圭	1	1								
2	圭	1	2	1							
3	平方	1	3	3	1						
4	立方	1	4	6	4	1					
5	三乘	1	5	10	10	5	1				
6	四乘	1	6	15	20	15	6	1			
7	五乘	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	六乘	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	七乘	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
n		一级	二级	三级	四级	五级	六级	七级	八级	九级	十级

依次确定"取数".首先确定

一级取数=1

以下确定二级、三级、……取数.

$$(2-1)\div 2=\frac{1}{2}\text{(二级取数)}$$

圭之n　圭一级　圭二级

$$\left(3-\left(1+3\times\frac{1}{2}\right)\right)\div 3=\frac{1}{6}\text{(三级取数)}$$

平方n的　平方一级　平方二级　二级取数　平方三级

$$\left(4-\left(1+4\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{6}\right)\right)\div 4=0\text{(四级取数)}$$

立方n的　立方一级　立方二级　二级取数　立方三级　三级取数　立方四级

$$\left(5-\left(1+5\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{6}+10\times 0\right)\right)\div 5=-\frac{1}{30}\text{(五级取数)}$$

三乘n的　三乘一级　三乘二级　二级取数　三乘三级　三级取数　三乘四级　四级取数　三乘五级

$$\left(6-\left(1+6\times\frac{1}{2}+15\times\frac{1}{6}+20\times0+15\times\left(-\frac{1}{30}\right)\right)\right)\div6=0\text{(六级取数)}$$

四乘n的　四乘一级　四乘二级　二级取数　四乘三级　三级取数　四乘四级　四级取数　四乘五级　五级取数　四乘六级 [274]

$$\left(7-\left(1+7\times\frac{1}{2}+21\times\frac{1}{6}+35\times0+35\times\left(-\frac{1}{30}\right)+21\times0\right)\right)\div7=\frac{1}{42}\text{(七级取数)}$$

五乘n的　五乘一级　五乘二级　二级取数　五乘三级　三级取数　五乘四级　四级取数　五乘五级　五级取数　五乘六级　六级取数　五乘七级

……　　……　　……

根据这个规则,一般地可以确定取数:

二级取数 $\frac{1}{2}$　　三级取数 $\frac{1}{6}$　　四级取数 0

五级取数 $-\frac{1}{30}$　　六级取数 0　　七级取数 $\frac{1}{42}$

八级取数 0　　九级取数 $-\frac{1}{30}$　　十级取数 0

十一级取数 $\frac{5}{66}$　　……　　……

用这个取数乘以前面介绍的帕斯卡三角数的各级数,并把右端的 1 改为 0.

n											
2	丰	1	1	0							
3	平方	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0						
4	立方	1	2	2	0	0					
5	三乘	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	0				
6	四乘	1	3	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0			
7	五乘	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0		
8	六乘	1	4	$\frac{14}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	
9	七乘	1	$\frac{9}{2}$	6	0	$-\frac{21}{5}$	0	2	$-\frac{3}{10}$	0	

[275]

……　　……　　……

取消这里的分母,并乘以 n 的结果叫做“法”.

图 7

n									
2	圭	1	1	0					
6	平方	2	3	1	0				
4	立方	1	2	1	0	0			
30	三乘	6	15	10	0	0			
12	四乘	2	6	5	0	-1	0		
42	五乘	6	21	21	0	-7	0	1	0

24	六乘	3	12	14	0	−7	0	2	0	0	
90	七乘	10	45	60	0	−42	0	20	0	−3	0
……				……			……			……	

这样，完成了垛积公式. 所谓“法”是指除数. 例如，

立方方垛

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}(n^2+2n^3+n^4);$$

三乘方垛

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{1}{30}(-n+10n^3+15n^4+6n^5).$$

从右端按幂的升级作系数即可.

西方人把前面提到的取数(除二取数外) $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $-\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$, …，叫做贝努利数，而应该叫做关孝和——贝努利数较为恰当.

有关孝和于 1680 年发现这个漂亮公式的证据. 江户时代初 [277]
期，日本国从中国引进数学书以后仅仅过了 50 年的时间. 在如此短暂的时间里取得这么出色的成就，除日本以外没有其他国家. 这是日本人永远值得自豪的文化遗产.

西方的贝努利最早研究了这个方法. 在关孝和去世后出版的他的遗稿《括要算法》(1712 年)中发表了该方法. 同样，贝努利(Jagues Bernoulle)的研究成果也是他去世后，在“Ars Conjectandi”中发表的，比关孝和晚一年.

正如上述，关孝和从帕斯卡三角数推导出了这个公式，贝努利也用了完全相同的方法，这也是一个微妙的地方.

第2节 数列和图形

前面已经介绍了下面的数列

(1) 1　2　3　4　5　6　……

(2) 1　6　12　18　24　30　……

(3) 1　3　6　10　15　21　……

(4) 1　4　9　16　25　36　……

其中,(1)是堆积的形状,(2)是捆包弓箭的形状,(3)是按正三角形的纸板形状,(4)是按正方形的纸板形状.这些数列曾经成为数学研究的动机.西方也有类似的问题,这里将概括论述这些问题.

1. 点列

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

人们都知道,对于 $n\times n$ 个点上式成立,对于 $n\times(n+1)$ 个点也同样可以用图形化方法表示.即,

[278]
$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1).$$

相加这个式后得

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

据说是毕达哥拉斯使用了这种方法.

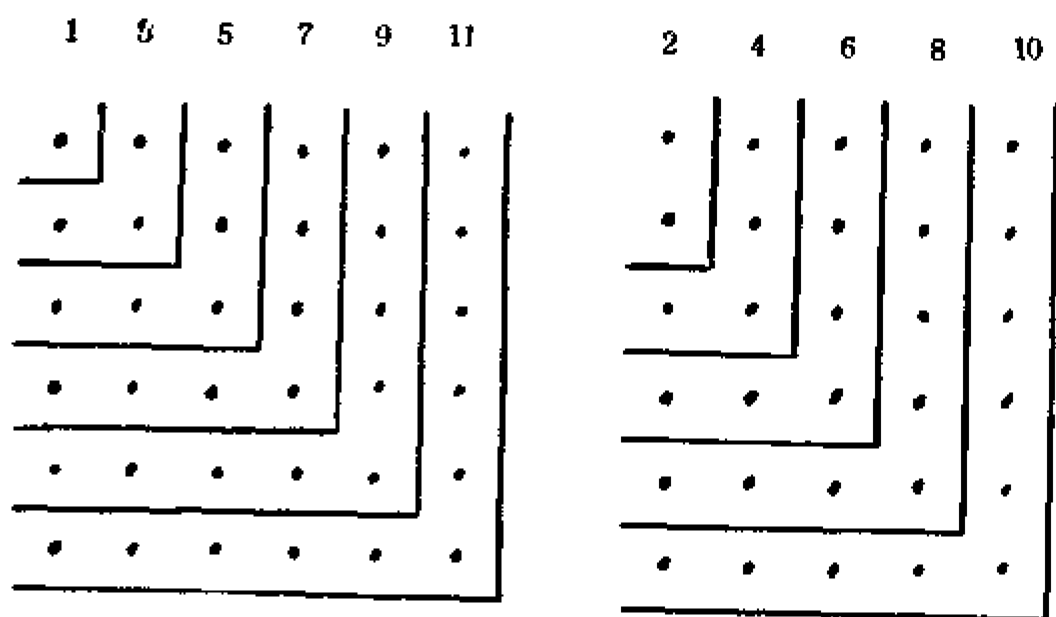


图 8

与此类似的有如下研究.

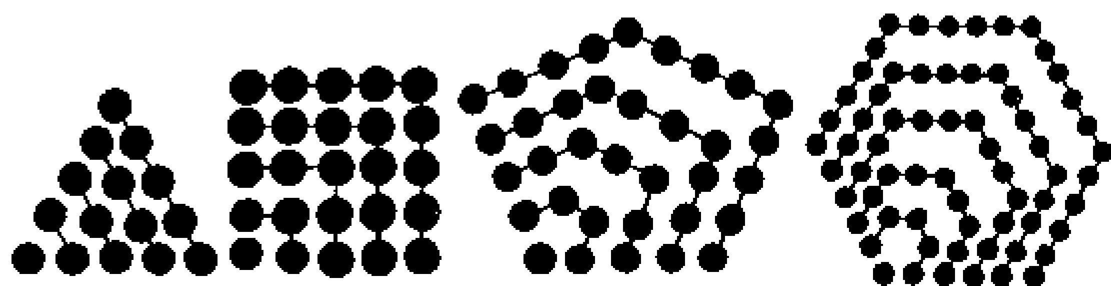


图 9

从图中可以看到,能够作出有规则的一定数列.给它们起名如下:

三角数	1	2	3	4	5	……
四角数	1	3	5	7	9	……
五角数	1	4	7	10	13	……
六角数	1	5	9	13	17	……
……		……			……	

按正三角形放置纸板的数列

1　3　6　10　15　……　[279]

可以分解为 1　(1+2)　(1+2+3)　(1+2+3+4)　……的形式后,得到下面的结果:

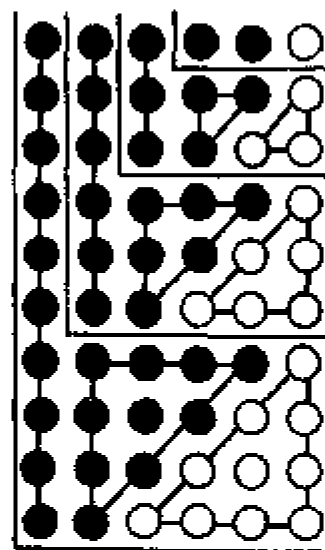


图 10

$1=(1+2)\times 1\times\frac{1}{3}$;

$1+(1+2)=(2+2)(1+2)\times\frac{1}{3}$;

$1+(1+2)+(1+2+3)$

$=(3+2)(1+2+3)\times\frac{1}{3}$;

$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)$

$=(4+2)(1+2+3+4)\times\frac{1}{3}$;

……………………………………………

一般地，有

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=(n+2)(1+2+3+\cdots+n)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

2. 方眼格纸的格

如图 11 所示，数一数相同记号的个数后发现 1，2，3，4，…，以对角线作为界线，又出现相反的顺序. 因此，

$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6^2.$$

		◎	△	×	○
			◎	△	×
				◎	△
					◎

图 11

一般地有

[280] $$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2,$$

即

$$(1+2+3+\cdots+n)\times 2=n^2+n,$$

故

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

这个公式用 $n\times(n+1)$ 格的格纸按图 12 分割也很容易理解. 全部格的数目为 $n\times(n+1)$，它等于 $1+2+3+\cdots+n$ 的 2 倍.

下面观察一下按下图分割正方形格纸的情形. 用黑粗线分割的格的数目为

1， 8， 27， 64， …

一般地有

$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \cdots$

证明如下：

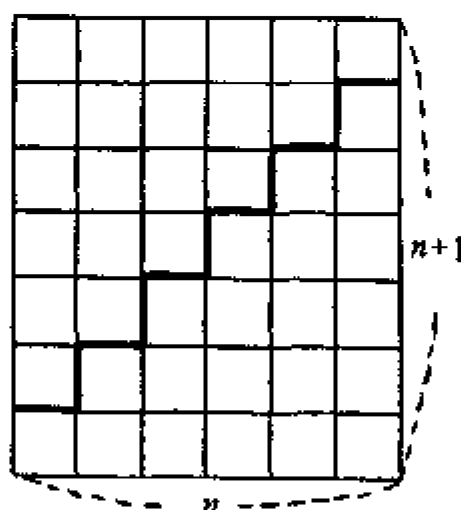


图 12

观察各个分割出的区域后发现

$$8=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot1$$
$$=2(1+2+1);$$
$$27=3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot2+3\cdot1$$
$$=3(1+2+3+2+1);$$
$$64=4\cdot1+4\cdot2+4\cdot3+4\cdot4+4\cdot3+4\cdot2+4\cdot1$$
$$=4(1+2+3+4+3+2+1).$$

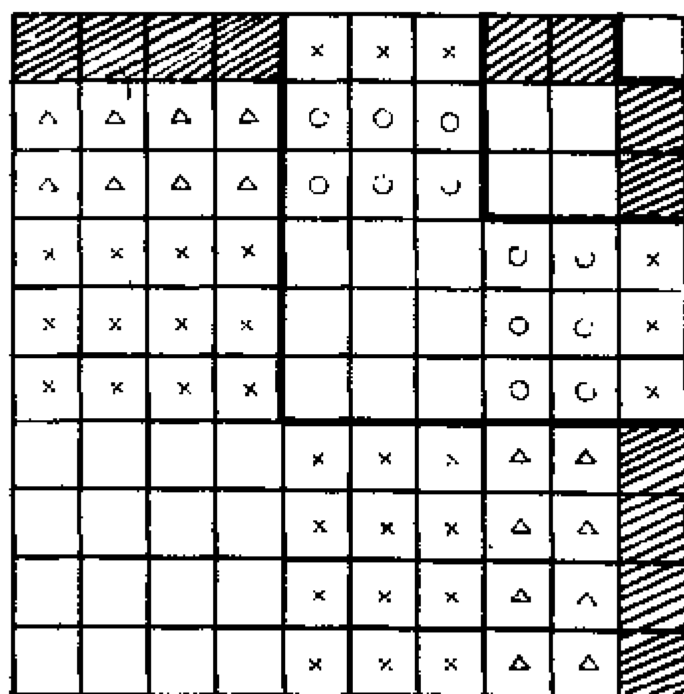


图 13

由前面的论述可知，右边的括弧中的数为平方数，因此，上述 3 个式分别为 $2^3, 3^3, 4^3$. 因为这种思考方法在一般情况下都 [281]

成立,所以可作为一般性证明.

从全部正方形的角度考虑的话,一边的格数为(1+2+3+4).由这些一般性的思考方法可以看出

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

3. 平方与立方

试观察下面 S_1, S_2, S_3 之间的关系:

$$1+2+3+\cdots+n=S_1;$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=S_2;$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=S_3.$$

1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2
1	2	3	3	3	3	3
1	2	3	4	4	4	4
1	2	3	4	5	5	5
1	2	3	4	5	6	6
1	2	3	4	5	6	7

图 14

如果正方形格纸的格里填写如图 14 中的数字,那么,各个区域中的式子都成立:

$1=1^2$;

$1+2+1=2^2$;

$1+2+3+2+1=3^2$;

$1+2+3+4+3+2+1=4^2$;

… … …

这里考察第 5 列.

$$(1+2+3+4+5)+(5+5)=(1+2+3+4+5)+(7-5)\cdot 5.$$

这个结果,对第 r 列也成立,因此,如果设正方形的一边格数为 n,那么,一般地有

[282]

$$(1+2+3+\cdots+r)+(n-r)r=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}r+nr-r^2$$
$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)r-\frac{1}{2}r^2.$$

当 $r=1$ 时,$\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1^2$;

当 $r=2$ 时,$\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 2^2$;

当 $r=3$ 时，$\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 3^2$；

… … … …

当 $r=n$ 时，$\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot n-\frac{1}{2}\cdot n^2$.

把这些全部相加后得全体数的和：

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+2+3+\cdots+n)$$

$$-\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2),$$

故

$$S_2=\left(n+\frac{1}{2}\right)S_1-\frac{1}{2}S_2,$$

最后得

$$S_2=\frac{2n+1}{3}S_1,$$

即明确了 S_1,S_2 的关系.

下面，与前面相同的图中填写如下数字，于是得

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

图 15

$$1=1^3,$$

$$2+4+2=2(1+2+1)=2^3,$$

$$3+6+9+6+3$$

$$=3(1+2+3+2+1)=3^3,$$

…… …… …… ……

故全体数的和为

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=S_3.$$ [283]

然而，

$$第一行=1+2+3+\cdots+n=S_1,$$

$$第二行=2+4+6+\cdots+2n=2S_1,$$

…… …… ……

$$第\ r\ 行=r+2r+3r+\cdots+nr=rS_1.$$

故全体数之和为

$$(1+2+3+\cdots+n)S_1=S_1^2.$$

与前面的式比较后得到

$$S_3=S_1^2.$$

由以上论述可知，下面三个图中的全体数之和都等于 S_2.

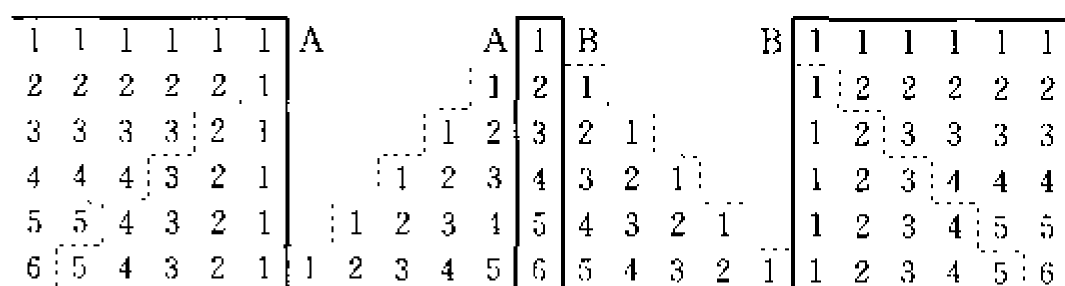


图 16

按虚线所表示的部分分开左右两部分，分别向 A,B 移置.

					A	B				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

图 17

于是，得到上面的图表，其和为 $(2n+1)S_1$，故

$$3S_2=(2n+1)S_1.$$

[284] 这个结果和前面所表示的关系是一致的.

……………………………

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1,$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\cdots=\frac{1}{3}.$$

众所周知，可以将这两个几何级数作为一条直线上的点的序列用图形化方法表示，然而，后者具有有趣的性质. 即引任意角的平分线，再引该线与原来角的一边所夹的角的平分线. 但

是，正角和负角的方向是相反的，这样继续进行. 于是，这些平分线接近原来角的三等分线.

第3节 毕达哥拉斯定理

以毕达哥拉斯的名字命名的毕达哥拉斯定理，就是直角三角形的斜边上的正方形等于其余两边上的正方形之和. 这是在古代埃及、印度和中国被发现的，但我们还不知道其详细情况. 公元前580年左右，毕达哥拉斯及其学派因研究了这个命题而著称于世.

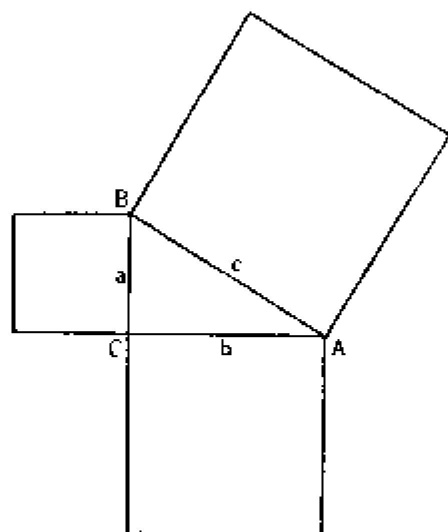


图 18

1.《周髀算经》

据说古代中国人很早以前就知道了毕达哥拉斯定理. 据传说有人看到中国建筑中经常见到的镶嵌工艺图案后发现了直角三角形的情形，但这毕竟是传说.

［285］

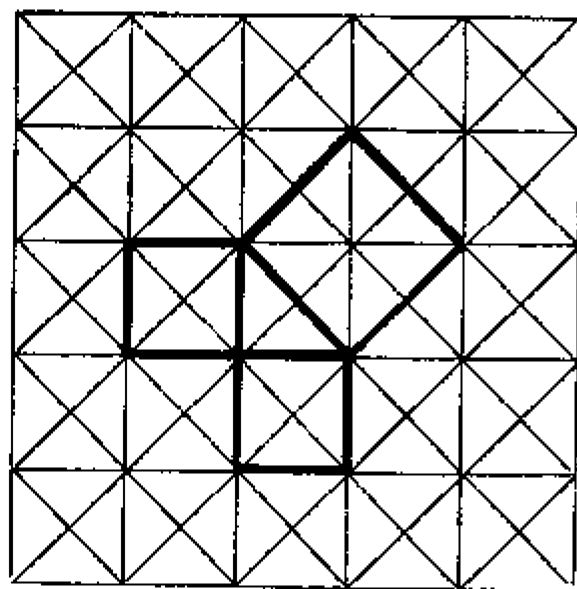


图 19

最早使用毕达哥拉斯定理的文献是《周髀算经》.据说《周髀算经》是在公元前 1 000 年以前就成书了，但现在流传的是在汉代(大约公元一世纪左右)所注解的著作.书中说：

“从髀至日下六万里，而髀无影，从此以上至日则八万里.”髀就是杆.从立杆之处行走六万里就到达太阳的正下方.到该点以后杆的影子也就没有了.从这个点到太阳的距离为八万里，从最初的地点到太阳的距离为十万里.也就是说，直角三角形的三边的长度分别是 6 万里、8 万里和 10 万里.《周髀算经》中并没有明确地论述毕达哥拉斯定理.



[286] 图 20 《算法统宗》校点版 《周髀算经》

测无法达到的岛的高之图.

大约公元 100 年左右成书的《九章算术》中说：

“今有勾三尺，股四尺，问为弦几何？答曰：五尺.”

勾是前面的直角三角形图中的高 a，股是底边 b，弦是斜边 c.

虽然在《九章算术》中没有论述毕达哥拉斯定理的形式，但由上述例中可看出，当时确实掌握了毕达哥拉斯定理.

从此以后，中国的算学书中记载了毕达哥拉斯定理的应用，但几乎没有它的证明.

2. 日本的毕达哥拉斯定理

根据中国程大位的《算法统宗》，日本的吉田光由在宽永 4 年（1627 年）写了《尘劫记》，该书中有具体的毕达哥拉斯定理. 但是，从"勾配之延"的计算看，作者的确知道毕达哥拉斯定理. 这是日本最早的毕达哥拉斯定理的记载.

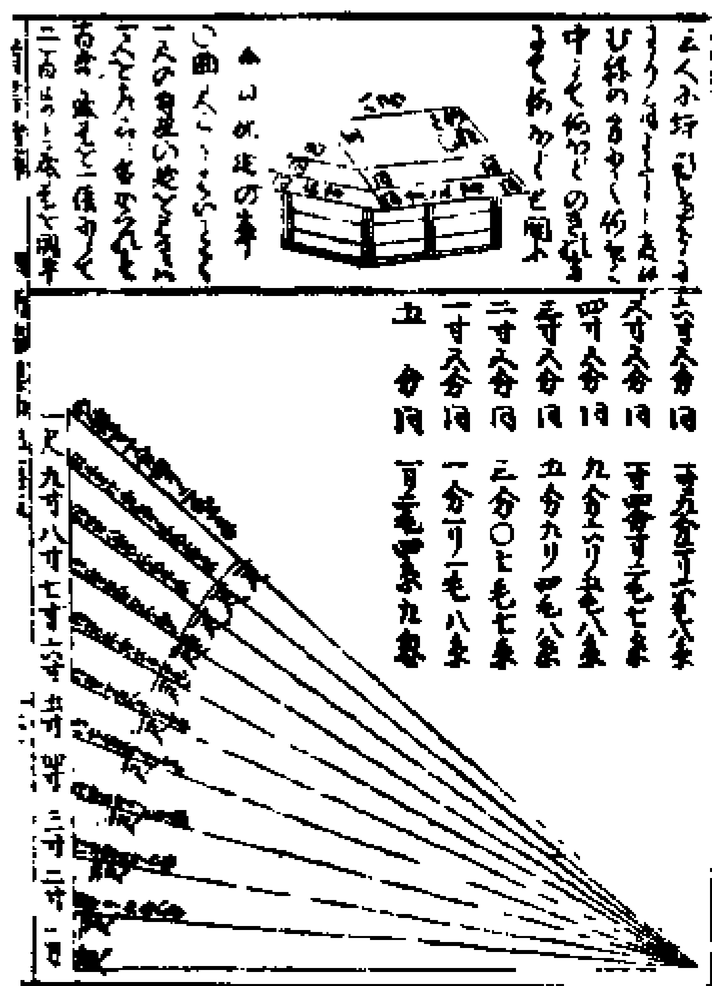


图 21 《尘劫记》中的勾股定理. [287]

最早具体地论述毕达哥拉斯定理的著作是宽永 16 年（1639

年)出版的今村知商的《竖亥录》.

"以钩之尺数,自因乘,而得步数,又以股之尺数,自因乘,而得步数,右钩股之步数并合而为实,用开平之式,是弦也."

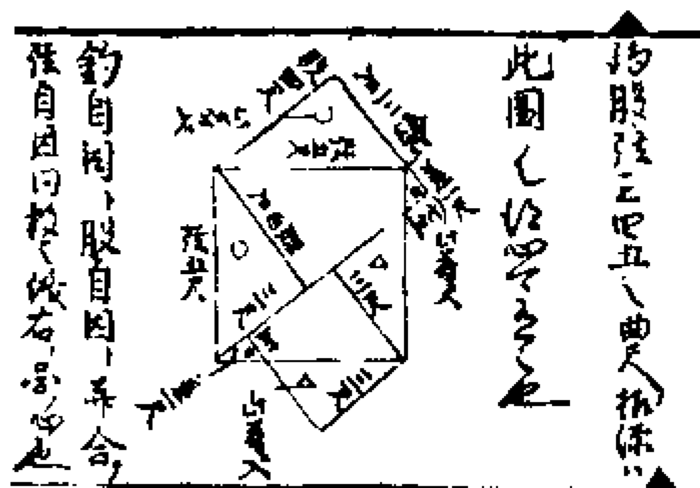
(勾的平方加股的平方,然后开平方,就是弦)

弦是直角三角形的斜边,钩和股是其余两边."自因乘"是乘方的意思."为实,用开平之式"是指开平方."步数"是指面积.上面古汉语的意思就是下面的计算公式:

$$\sqrt{勾^2+股^2}=弦.$$

《竖亥录》是第一次使用学术术语论述数学的日本数学著作.

延保元年(1673 年)出版的村濑义益的《算法勿惮》(不用顾忌改革算法)中第一次证明了毕达哥拉斯定理.相同的证明也出现在贞享元年(1684 年)再版的矶村吉德的《增补算法阙疑抄》中.宽文元年(1661 年)的第一版《算法阙疑抄》中没有记载,因此,不清楚究竟是谁先发现了毕达哥拉斯定理的证明方法.



[288] 图 22 《算法阙疑抄》中毕达哥拉斯定理的证明.

这个证明是将上图割补面完成的.

从此以后,日本的数学家探索了各种证明方法.如图 25 所示,日本数学泰斗关孝和在《解见题之法》(1686 年)中介绍了相

同的证明方法.此外,如下图右所示,文政 13 年(1830 年)出版的长谷川宽的《算法新书》中也给出了证明.

以上只论述了两种证明方法.当然,在西方有许多证明方法.大概有几百种证明之多.人们能够出版收集毕达哥拉斯定理的证明方法的书,但要是明确谁使用了什么方法是非常困难的.因此,这里只举数种证明方法的图形.

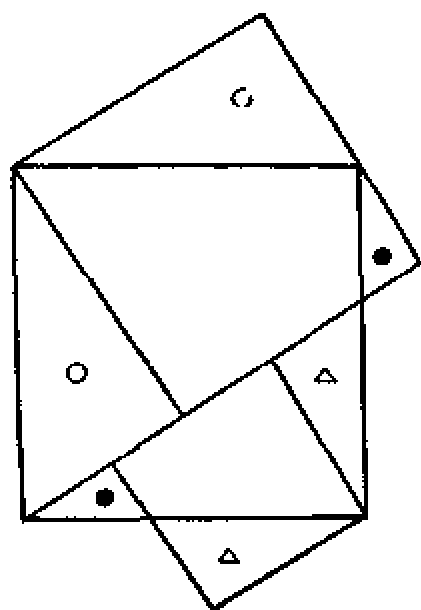


图 23

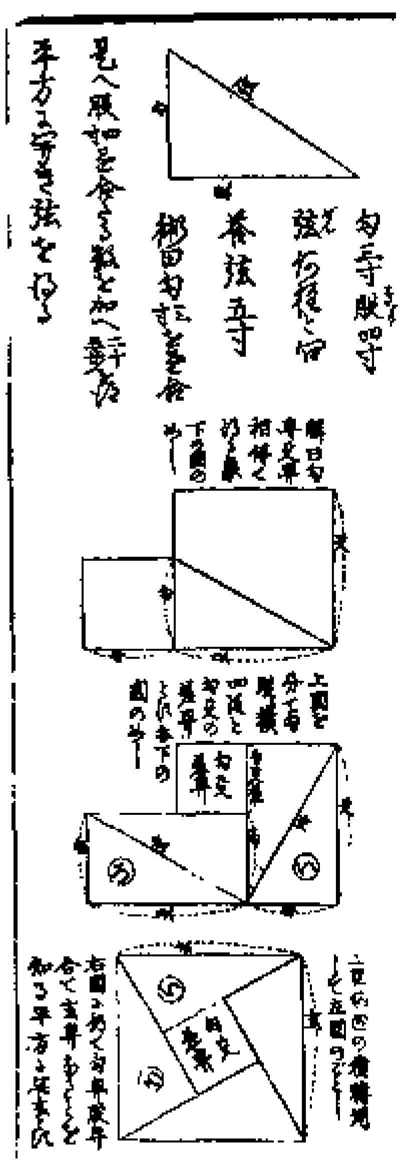
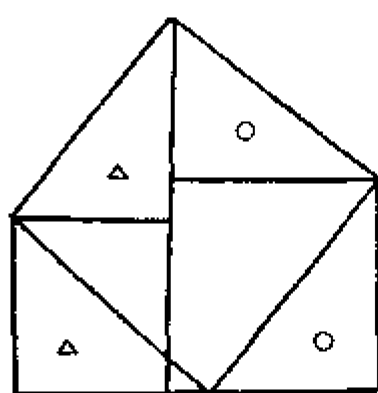
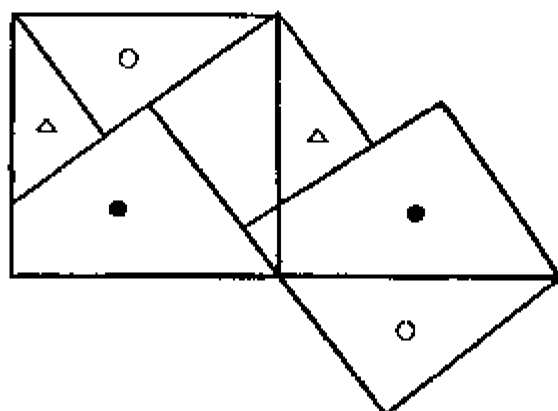


图 24 《算法新书》中勾股定理的证明.





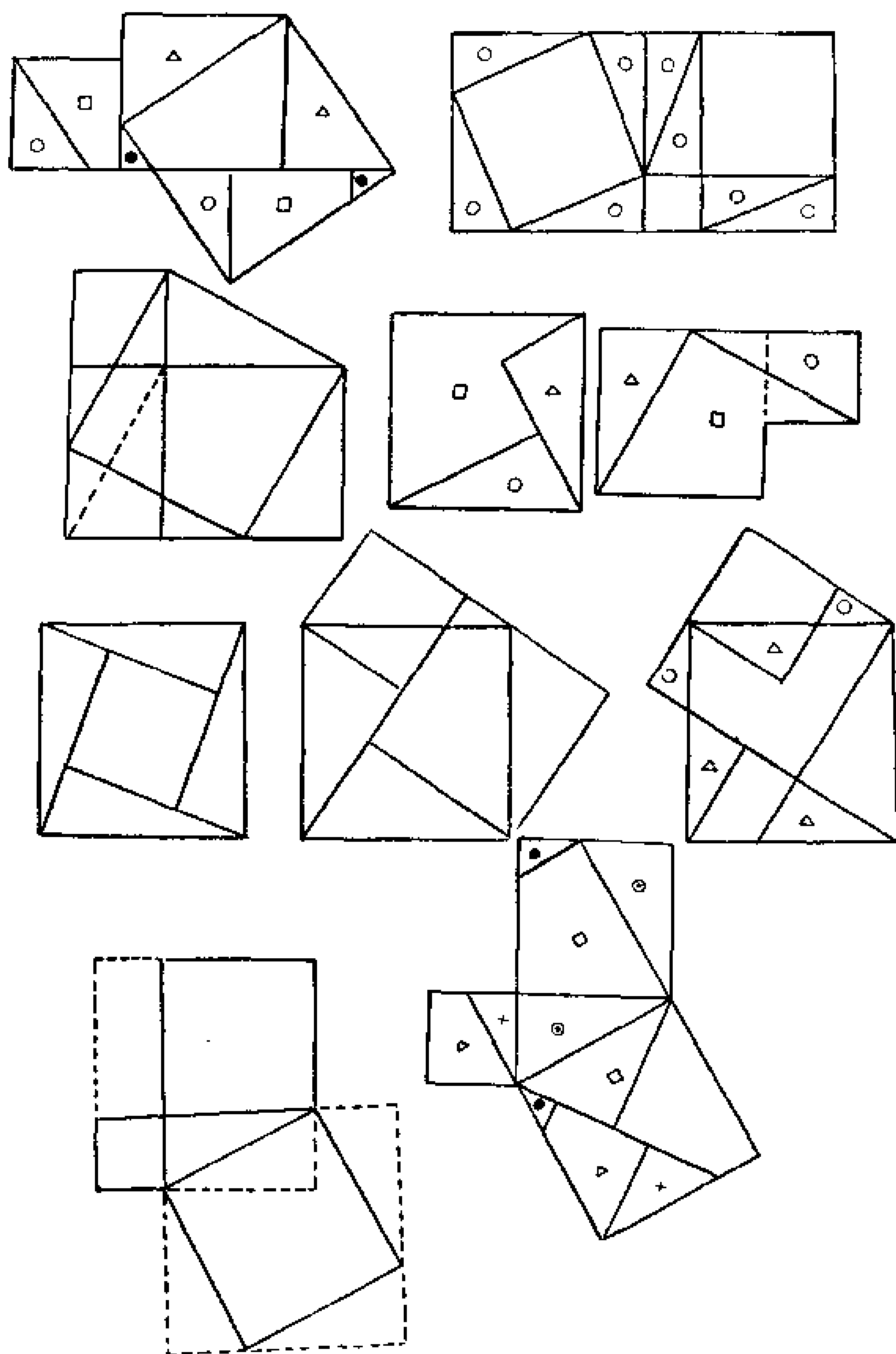


图 25

3. 计算证明方法

在《林鹤一博士和算研究集录》(1937 年)下卷第 684 页～第 694 页中记载了日本数学家的毕达哥拉斯定理的证明方法约有 40 种. 其中也有简单的计算证明方法. 下面举例说明其中的两三个.

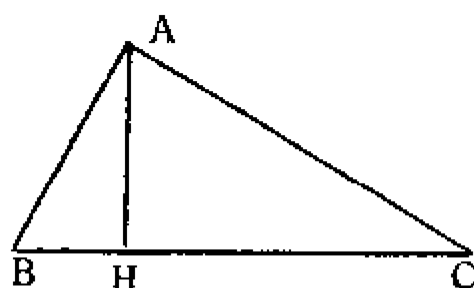


图 26

(i) 从直角三角形的直角的顶点引斜边的垂线 AH，那么，三角形 ABC、AHB、AHC 成为相似三角形. 故

$$\frac{\triangle ABH}{AB^2}=\frac{\triangle ACH}{AC^2}=\frac{\triangle ABC}{BC^2},$$

从而

$$\frac{\triangle ABH+\triangle ACH}{AB^2+AC^2}=\frac{\triangle ABC}{BC^2}.$$

因为

$$\triangle ABH+\triangle ACH=\triangle ABC,$$

故

$$AB^2+AC^2=BC^2.$$

(ii) 首先作半圆 ECF，自直径 FE 的延长线上一点 B 引圆的切线，那么，

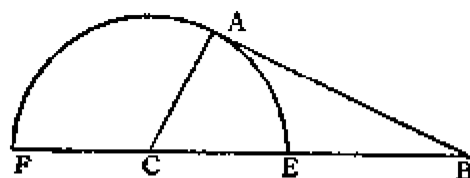


图 27

$$\begin{aligned}AB^2&=BE\times BF\\&=(BC+AC)(BC-AC)\\&=BC^2-AC^2,\end{aligned}$$

故

$$AB^2+AC^2=BC^2.$$

(iii) 延长直角三角形 ABC 的一边 AC，如图 28 作相等的直角三角形 DEC. [291]

现在，设 $BC=a$，$AB=c$，$AC=b$，则

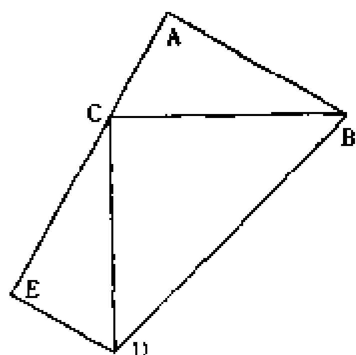


图 28

四边形 $ABDE=\triangle ABC+\triangle EDC+\triangle BDC$,

故

$$\frac{(b+c)}{2}\times(b+c)=\frac{bc}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{a^2}{2},$$

$$(b+c)^2=2bc+a^2,$$

$$b^2+c^2=a^2.$$

第4节　毕达哥拉斯数①

1. 毕达哥拉斯数

我们已经知道,设夹直角三角形 ABC 的直角的两边为 a,b,斜边为 c,则

$$a^2+b^2=c^2.$$

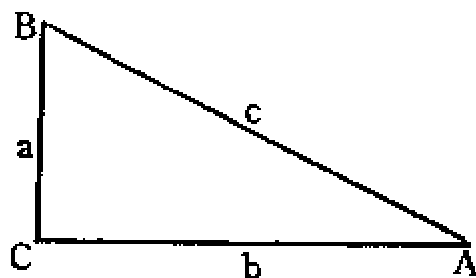


图 29

在中国古代天文学著作《周髀算经》中,记载了利用这个定理测量太阳高度的方法.此外,据说古埃及人也知道这个定理.

然而,到了古希腊时代后,毕达哥拉斯(大约公元前 580 年～500 年)及其学派,作为学术问题研究了该定理,因此,称为毕达哥拉斯定理.

在中国和日本命名为

$$a=\text{勾},b=\text{股},c=\text{弦}$$

把直角三角形的关系叫做勾股弦.这样,把该定理叫做勾股定理

① 见李俨:《中算家的毕达哥拉斯定理研究》,《中算史论丛》第三集.北京:科学出版社,1955 年,第 44 页～第 75 页.其中有关于定理论证的方法和毕达哥拉斯数.

或者勾股弦定理. [292]

众所周知,三个整数 3,4,5 有如下关系

$$3^2+4^2=5^2.$$

由于这关系式满足毕达哥拉斯定理,所以把它叫做毕达哥拉斯数. 该数由注重整数的毕达哥拉斯学派的人们经过研究以后就出名了. 但据说在古代印度作祭坛时需要毕达哥拉斯数. 在印度的公元前的文献中,列举了直角三角形的如下整数值.

3, 4, 5; 12,16,20; 15,20,25; 5, 12,13;
15,36,39; 8, 15,17; 12,35, 37

中国和日本,木匠营造时为了判断柱子是否垂直而利用了毕达哥拉斯数. 立柱子的时候,如前面所介绍的在直角三角形图形中取 $BC=3$,$CA=4$,如果 $BA=5$,那么,就证明了柱子和地面形成了直角. 古时候,把这叫做"矩"或"试矩". "矩"就是木匠使用的折尺.

2. 毕达哥拉斯数的求法

人们很早以前就开始了使直角三角形的三边为整数的研究. 流传下来下面的公式:

	两个直角边		斜边
(1)	n,	$\frac{n^2-1}{2}$,	$\frac{n^2+1}{2}$,(n 为奇数)
(2)	n,	$\frac{n^2}{4}-1$,	$\frac{n^2}{4}+1$,(n 为偶数)
(3)	$\sqrt{mn}$,	$\frac{m-n}{2}$,	$\frac{m+n}{2}$
(4)	$2mn$,	m^2-n^2,	$m^2+n^2$①
(5)	$\frac{m(n^2-1)}{n^2+1}$,	$\frac{2mn}{n^2+1}$,	m [293]

① "前苏联 З. И. ерезкцНа 在《中国古代数学》(俄文)中第 261 页指出:中国《九章算术》有 $\frac{m^2-n^2}{2}$,mn,$\frac{m^2+n^2}{2}$ 勾股数,与(4)一致.

(6) $\sqrt{m}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-n\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+n\right)$

(7) $2n$, n^2-1, n^2+1

(8) $2n+1$, $\frac{(2n+1)^2-1}{2}$, $\frac{(2n+1)^2-1}{2}+1$

(9) m, $\frac{2mn}{n^2-1}$, $\frac{m(n^2+1)}{n^2-1}$

(10) $\frac{l^2-m^2}{2m}$, l, $\frac{l^2+m^2}{2m}$

(11) $\frac{n^p}{2^p}\pm 2^{p-2}$，这里，$p$ 取任意整数后，n 取适当的整数.

据说，(1)是由毕达哥拉斯、(3)和(7)是由柏拉图、(4)是由欧几里得、丢番图(Diophantus)、布拉古普达(Brahmagupta)、玛哈维拉(Mahavira)、(5)是由丢番图、帕斯卡、(6)是由布拉古普达、玛哈维拉、帕斯卡、(8)是由普罗克谷斯(Proclus)(9)是由帕斯卡发现的.

日本也有与这些公式类似的发现和其他公式，但由于非常复杂的缘故这里不介绍了.

尽管人们进行了这些研究，但最后没有能够用一个公式表示直角三角形的三边为整数的所有组合. 不仅是这些. 如下面将要介绍的那样，100 以下的组合就有 16 组，但不能说这是全部的证明. 而只能说明在实际实验中还没有发现除此之外的公式而已. 在日本的藤田贞资(1781 年)、中国的王鉴古(1897 年)的研究中也得到 16 组数.

3，4，5； 5，12，13； 7，24，25；
8，15，17； 9，40，41； 11，60，61；
12，35，37； 13，84，85； 16，63，65；
20，21，29； 28，45，53； 33，56，65；
36，77，85； 39，80，89； 48，55，73；
[294] 65，72，97；

这里省略了 100 以下有约数的情况. 在 1 000 以下的情况，我们很难说有多少组. 至今举例最多组数的文献中有 158 组.

3. 毕达哥拉斯数的余枝

虽然毕达哥拉斯数在学术上作用极其微弱，但在教育方面是丰富而有趣味的资料. 因此，这里将介绍浦田繁松氏对口雅彦和寺村周太郎等诸位先生的研究进行整理后的结果.

首先，如 $3^2+4^2=5^2$，三个数相连的毕达哥拉斯数只有这一组，而两个数相连的毕达哥拉斯数有几种：

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$20^2+21^2=29^2,$$
$$119^2+120^2=169^2,$$
$$696^2+697^2=985^2.$$

我们能够作 5 个数相连的数组. 在这个情形下，当连续数为 $(2n+1)$ 个时，因为正中间的数为 $2n(n+1)$，所以很容易地作出来. 此外，把左边的 3，10，21，36，…按帕斯卡三角形形式确定就可以了.

$$3^2+4^2=5^2$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$$
$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$$
$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$$

其中，$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$ 的值为一年的日数 365，非常有趣. 可以让儿童计算下面的式.

$$\frac{10^2+11^2+12^2}{13^2+14^2}=?$$

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=?$$

立方的情形，如 $3^3+4^3+5^3=6^3$，通过式的两边，没有其他
[295] 连续数. 但只有左边才有连续数.

$$3^3+4^3+5^3=6^3,$$

$$11^3+12^3+13^3+14^3=20^3,$$

$$6^3+7^3+8^3+\cdots+30^3=60^3,$$

$$6^3+7^3+8^3+\cdots+69^3=180^3,$$

$$1\,134^3+1\,135^3+\cdots+2\,133^3=16\,830^3.$$

左边是连续数，把这个结果可以扩展为等差级数.

$$435^3+506^3+577^3+648^3+719^3+790^3=1\,155^3,$$

$$76^3+477^3+878^3+1\,279^3+\cdots+2\,883^3=3\,016^3,$$

$$15^3+52^3+89^3+126^3+\cdots+348^3=495^3,$$

$$28^3+41^3+54^3+67^3+80^3+93^3+106^3+119^3=168^3.$$

除此之外，还有将等号左边最后一个数和等号右边数连续起来的等式.

$1^3+6^3+8^3=9^3$	$27^3+64^3+306^3=307^3$
$3^3+10^3+18^3=19^3$	$48^3+85^3+491^3=492^3$
$12^3+19^3+53^3=54^3$	$48^3+109^3+684^3=685^3$
$12^3+31^3+102^3=103^3$	$75^3+136^3+989^3=990^3$
$27^3+46^3+197^3=198^3$	$75^3+166^3+1\,290^3=1\,291^3$

以上论述了立方的情况，下面我们又回到毕达哥拉斯数. 首先，有颠倒数字顺序的毕达哥拉斯数.

$$90\,288^2+88\,209^2=126\,225^2,$$

$$65\,065^2-56\,056^2=33\,033^2,$$

$$75\,515^2-51\,557^2=55\,176^2,$$

$$71\,555^2-55\,517^2=42\,174^2,$$

$$84\,295^2-59\,248^2=59\,961^2.$$

用两个形式表示的最小毕达哥拉斯数为 25.

$$25^2=7^2+24^2=15^2+20^2.$$

用三种形式表示的最小的毕达哥拉斯数为 125.

$$125^2=35^2+120^2=44^2+117^2=75^2+100^2.$$ [296]

用四种形式表示的最小的毕达哥拉斯数为 65.

$$65^2=16^2+63^2=25^2+60^2=33^2+56^2=39^2+52^2.$$

这是法国著名数学家费马(P. de Fermat,1601—1665)得出的结果.

扩展毕达哥拉斯数，由于求 3 个、4 个、……的平方和的计算显得容易，所以没有能够引起人们的注意. 但把平方改为立方、四次方、……的结果，就出现了与费马猜想有关的重要问题.

例如等式

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(b^2+c^2-a^2)+(2ab)^2+(2ac)^2.$$

由此得下面的等式：

$$41^2=31^2+24^2+12^2,$$
$$41^2=33^2+24^2+4^2,$$
$$41^2=39^2+12^2+4^2.$$

$41^2=1\ 681$,但平方数的值在 1 000 以内的,3 个数的平方之和的数有如下 23 题.

$7^2=6^2+3^2+2^2$	$21^2=20^2+5^2+4^2$	$26^2=24^2+8^2+6^2$
$11^2=9^2+6^2+2^2$	$=19^2+8^2+4^2$	$27^2=26^2+7^2+2^2$
$13^2=12^2+4^2+3^2$	$=18^2+9^2+6^2$	$=25^2+10^2+2^2$
$15^2=11^2+10^2+2^2$	$=16^2+13^2+4^2$	$=23^2+14^2+2^2$
$17^2=12^2+9^2+8^2$	$=16^2+11^2+8^2$	$=22^2+14^2+7^2$
$18^2=16^2+8^2+2^2$	$23^2=22^2+6^2+3^2$	$31^2=27^2+14^2+6^2$
$19^2=18^2+6^2+1^2$	$=18^2+14^2+3^2$	$=22^2+21^2+6^2$
$=15^2+10^2+6^2$	$25^2=20^2+12^2+9^2$	

用 4 个以上数的平方表示的数有：

$9^2 = 6^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2$

$13^2 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 = 10^2 + 7^2 + 4^2 + 2^2$

$15^2 = 11^2 + 8^2 + 6^2 + 2^2$

$15^2 = 12^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2$

$19^2 = 16^2 + 8^2 + 6^2 + 2^2 + 1^2$

$26^2 = 23^2 + 11^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 = 19^2 + 17^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2$

$13^2 = 9^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$26^2 = 23^2 + 9^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2 + 1^2$

$= 17^2 + 16^2 + 13^2 + 9^2 + 8^2 + 1^2$

$26^2 = 23^2 + 9^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$= 18^2 + 16^2 + 12^2 + 9^2 + 8^2 + 5^2 + 1^2$

$17^2 = 11^2 + 10^2 + 8^2 + 2^2$

$19^2 = 12^2 + 10^2 + 9^2 + 6^2$

$10^2 = 7^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2$

$13^2 = 8^2 + 7^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2$

$= 17^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$17^2 = 11^2 + 8^2 + 7^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$26^2 = 19^2 + 11^2 + 10^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$= 18^2 + 16^2 + 12^2 + 9^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2$

$23^2 = 14^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$26^2 = 14^2 + 11^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2$

$26^2 = 14^2 + 11^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2$

特别是，如 15，45，91，…的$(2n+1)(4n+1)$形式的数可以表示为 5 个数的平方之和.

$15^2 = 5^2 + 6^2 + 6^2 + 8^2 + 8^2 = 3^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2$，

$45^2 = 1^2 + 6^2 + 8^2 + 30^2 + 32^2$，

$91^2 = 4^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + 90^2$.

如 $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$，也有等式两边用 2 个数的平方和来表示的数. 等式的值在 1 000 以内的有 67 题.

1, 8—4, 7	4,18—12,14	2,23—7,22	10,25—14,23
2, 9—6, 7	2,19—13,14	4,23—16,17	1,27—17,21
2,11—5,10	3,19—9,17	6,23—9,22	8,26—16,22
3,11—7, 9	4,19—11,16	2,24—16,18	5,27—15,23
1,12—8, 9	7,19—11,17	3,24—12,21	6,27—18,21
1,13—7,11	5,20—8,19	9,23—13,21	6,28—12,26
4,13—8,11	5,20—13,16	7,24—15,20	2,29—13,26
3,14—6,13	8,19—13,16	2,25—10,23	2,29—19,22
5,14—10,11	1,21—9,19	5,25—11,23	13,26—19,22
5,15—9,13	2,21—11,18	5,25—17,19	11,27—15,25
2,16—8,14	9,20—15,16	11,23—17,19	10,28—20,22
3,16—11,12	1,22—14,17	2,26—14,22	7,29—19,23
1,17—11,13	3,22—13,18	3,26—18,19	8,29—11,28
4,17—7,16	4,22—10,20	8,25—17,20	14,27—21,22
1,18—6,17	8,21—12,19	11,24—16,21	12,29—16,27
1,18—10,15	6,22—14,18	7,26—10,25	10,30—18,26
6,17—10,15	1,23—13,19	7,26—14,23	

[298]

又如$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$，等式两边均为3个数的平方之和的，其值在300以下的有81题.

*1,5, 6—2,3, 7	*4,8, 9—5,6,10	*1,7,12—3,4,13
*2,6, 7—3,4, 8	*3,8,10—4,6,11	1,7,12—3,8,11
*1,6, 8—2,4, 9	1,2,13—5,7,10	3,4,13—7,8, 9
*3,7, 8—4,5, 9	*2,9,10—4,5,12	*1,9,11—3,5,13
*2,7, 9—3,5,10	4,5,12—6,7,10	1,3,14—2,9,11
*1,8, 9—3,4,11	2,4,13—3,6,12	1,3,14—5,9,10
1,2,12—6,7, 8	2,4,13—5,8,10	1,6,13—2,9,11
*1,7,10—2,5,11	*2,8,11—3,6,12	1,6,13—5,9,10
2,6,11—4,8, 9	3,6,12—5,8,10	*5,9,10—6,7,11

1, 8,12—2,3,14	2, 5,15—6, 7,13	3,6,15—7,10,11
*1, 8,12—2,6,13	*2, 9,13—3, 7,14	*1, 9,14—2, 7,15
2, 3,14 4,7,12	5, 6,14—7, 8,12	3, 4,16—6, 7,14
2, 6,13—4,7,12	*6,10,11—7, 8,12	*4,11,12—6, 7,14
*4, 9,11—5,7,12	3, 5,15—6, 8,13	2, 5,16—4,10,13
3, 4,14—6,8,11	3, 9,13—5,10,12	2, 5,16—5, 8,14
1, 5,14—2,7,13	*5,10,12—6, 8,13	2, 5,16—8,10,11
*1,10,11—2,7,13	1, 3,16—4, 5,15	*4,10,13—5, 8,14
3, 5,14—7,9,10	1, 3,16—4, 9,13	*3, 9,14—5, 6,15
*3,10,11—5,6,13	1, 3,16—8, 9,11	*1, 8,15—3, 5,16
5, 6,13—7,9,10	*1,11,12 -4, 5,15	1, 8,15—5,11,12
1, 8,13—3,9,12	1,11,12—4, 9,13	3, 5,16—4, 7,15
*3, 9,12—4,7,13	4, 5,15—8, 9,11	4, 7,15—5,11,12
3, 9,12—7,8,11	2, 3,16—5,10,12	1, 2,17—5,10,13
*2, 8,13—4,5,14	3, 8,14—5,10,12	*1,10,14—4, 5,16
2, 8,13—4,10,11	*2,11,12—3, 8,14	1, 3,17—5, 7,15
*2,10,12 -4,6,14	*1,10,13—3, 6,15	1, 3,17—7, 9,13
2, 5,15—3,7,14	1,10,13—5, 7,14	*3,11,13—5, 7,15

在以上带 * 号的 34 道题中，等号两边 3 个数的和相等．即这 34 道题中，平方之和相等的同时，1 次方的和也相等．把它叫做别齐和等式．把它们记作，K_1 为 1 次方之和，K_2 为 2 次方之和．对于这个问题，安部元章在《续・数与算盘》(1943 年)中以“幂之不可思议”为题进行了论述．

$$1+5+6 \overset{2}{=} 2+3+7, K_1=12, K_2=62$$

在这个等式两边同时加减同一个数，别齐和等式也成立，因

[299] 此，每一数上加 1，则

$$2+6+7 \overset{2}{=} 3+4+8, K_1=15, K_2=89.$$

如果以这个原理作为基本型选择上面的等式，就可以很容易推

导出下面的等式.这里省略了加减相同的数后不成立的等式.

下面,列出等式两边有 4 个数的别齐和等式的 1 次方之和为小于 30 的基本型.最右端的数字是从基本型推导出来的题号.

③1,4, 6, 7—2,3, 5, 8
③1,4, 7, 8—2,3, 6, 9
③1,6, 7, 8 3,4, 5,10
③1,5, 7, 9—2,4, 6,10
③1,4, 8, 9—2,3, 7,10
②1,5, 8,10—2,4, 7,11
②1,4, 9,10—2,3, 8,11
②1,7, 8,10—3,5, 6,12
②1,6, 9,10—3,4, 7,12
②1,6, 8,11—2,5, 7,12
②1,5, 9,11—2,4, 8,12
②1,5, 8,12—2,3,10,11
②1,4,10,11—2,3, 9,12
②1,3, 8,14—2,4, 5,15
1,4,10,12—2,5, 6,14
1,8, 9,10—4,5, 6,13
1,7, 9,11—3,5, 7,13
1,6,10,11—3,4, 8,13
1,6, 9,12—2,5, 8,13
1,5,10,12—2,4, 9,13
1,5,10,12—3,4, 7,14
1,6, 8,13—3,4, 7,14
1,4,11,12—2,3,10,13
1,6, 7,14—2,3,10,13
1,5, 8,14—3,4, 6,15
1,5, 9,14—2,3,11,13
1,8,10,11—4,5, 7,14
1,8, 9,12—3,6, 7,14
1,7,10,12—3,5, 8,14
1,7, 9,13—2,6, 8,14
1,6,11,12—3,4, 9,14
1,6,10,13—2,5, 9,14
1,7, 8,14—2,4,11,13
1,6, 9,14—3,4, 8,15
1,5,11,13—2,4,10,14
1,6, 8,15—2,3,12,13
1,4,12,13—2,3,11,14
1,4,11,14—2,5, 7,16

上面所列出的基本型有 38 个,从中推导出来的等式有 58 个.其中,下面的两个式子在 1 次方、平方、立方数的情况下都成立:

$$\begin{cases} 1+5+8+12=2+3+10+11 \\ 1^2+5^2+8^2+12^2=2^2+3^2+10^2+11^2 \\ 1^3+5^3+8^3+12^3=2^3+3^3+10^3+11^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+7+8+11=2+4+11+13 \\ 1^2+7^2+8^2+14^2=2^2+4^2+11^2+13^2 \\ 1^3+7^3+8^3+14^3=2^3+4^3+11^3+13^3 \end{cases}$$

下面通过简单的实例来说明为什么能够作出这样的等式的问题.

[300]

$$\left.\begin{aligned} 1+5+6=2+3+7 \\ 1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这个值为 12 和 62. 在立方的情形下，等式左边为 342，右边为 378，它们的差为 36. 在每一数上加 5 以后，下面的等式成立，立方之和为：左边 2 547，右边 2 583，它们的差为 36.

$$\left.\begin{aligned} 6+10+11=7+8+12 \\ 6^2+10^2+11^2=7^2+8^2+12^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

然后交换(2)的左右两边，再加到(1)上后消去两边共同有的 6 和 7，便得到两边由 4 个数构成的 3 次别齐和等式：

$$\left.\begin{aligned} 1+5+8+12=2+3+10+11 \\ 1^2+5^2+8^2+12^2=2^2+3^2+10^2+11^2 \\ 1^3+5^3+8^3+12^3=2^3+3^3+10^3+11^3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在(3)的各数上加 4 得

$$\left.\begin{aligned} 5+9+12+16=6+7+14+15 \\ 5^2+9^2+12^2+16^2=6^2+7^2+14^2+15^2 \\ 5^3+9^3+12^3+16^3=6^3+7^3+14^3+15^3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

交换(4)的两边，并加到(3)上，省略两边同一的数 5 和 12，那么，就得到两边由 6 个数字构成的 4 次别齐和等式：

$$\left.\begin{aligned} 1+6+7+8+14+15=2+3+9+10+11+16 \\ 1^2+6^2+7^2+8^2+14^2+15^2=2^2+3^2+9^2+10^2+11^2+16^2 \\ 1^3+6^3+7^3+8^3+14^3+15^3=2^3+3^3+9^3+10^3+11^3+16^3 \\ 1^4+6^4+7^4+8^4+14^4+15^4=2^4+3^4+9^4+10^4+11^4+16^4 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在(5) 两边的各数上加 7 后得

$$8+13+14+15+21+22=9+10+16+17+18+23 \quad (6)$$

这样，对各数乘 2 次方、3 次方、4 次方后等式也成立. 从(5)和(6)又得出

$$\left.\begin{aligned}
1+6+7+17+18+23&=2+3+11+13+21+22\\
1^2+6^2+7^2+17^2+18^2+23^2&=2^2+3^2+11^2+13^2+21^2+22^2\\
1^3+6^3+7^3+17^3+18^3+23^3&=2^3+3^3+11^3+13^3+21^3+22^3\\
1^4+6^4+7^4+17^4+18^4+23^4&=2^4+3^4+11^4+13^4+21^4+22^4\\
1^5+6^5+7^5+17^5+18^5+23^5&=2^5+3^5+11^5+13^5+21^5+22^5
\end{aligned}\right\} \text{[301]}$$

(7)

依次类推，可以得到任意次方的别齐和等式. 又改变所加的数后也能够得到其他等式.

下面观察 4 个 3 次方的数的和为 3 次方数以及 4 次方、5 次方和 6 次方数的和为 4,5,6 次方数的等式：

$$1^3+3^3+4^3+5^3+8^3=9^3$$

$$5^3+7^3+9^3+10^3=13^3$$

$$1^3+5^3+6^3+7^3+8^3+10^3=13^3$$

$$5^3+9^3+10^3+11^3+12^3=17^3$$

$$5^3+7^3+9^3+10^3+11^3+12^3+14^3=20^3$$

$$1^3+5^3+6^3+7^3+8^3+10^3+11^3+12^3+14^3=20^3$$

$$4^4+6^4+8^4+9^4+14^4=15^4$$

$$1^4+2^4+12^4+24^4+44^4=45^4$$

$$4^4+8^4+13^4+28^4+54^4=55^4$$

$$1^4+8^4+12^4+32^4+64^4=65^4$$

$$4^5+5^5+6^5+7^5+9^5+11^5=12^5$$

$$5^5+10^5+11^5+16^5+19^5+29^5=30^5$$

$$4^5+5^5+6^5+7^5+8^5+9^5+10^5+11^5+14^5+18^5+22^5=24^5$$

$$1^6+2^6+4^6+5^6+6^6+7^6+9^6+12^6+13^6+15^6+16^6+18^6+20^6+21^6+22^6+23^6=28^6$$

两边为 2 个数以上的等式中有如下的等式：

$1^3+12^3=9^3+10^3$	$59^4+158^4=133^4+134^4$
$2^3+16^3=9^3+15^3$	$7^4+239^4=157^4+227^4$
$10^3+27^3=19^3+24^3$	$193^4+292^4=256^4+257^4$
$2^3+34^3=15^3+33^3$	$103^4+542^4=359^4+514^4$
$9^3+34^3=16^3+33^3$	$76^4+1\ 203^4=653^4+1\ 176^4$

[302] $$1^4+24^4+43^4=3^4+7^4+44^4=6^4+31^4+41^4$$

$4p+1$（p 为正整数）形式的素数，$4p+1$ 形式的 5 的倍数的大部分，它的 1 次方、2 次方、3 次方的数可以表示为 2 个数的平方之和.

作为数学游戏 $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$ 等分数曾经引起人们的注意，去掉其分母后得

$$3^2+4^2=5^2.$$

所以，从以上介绍的等式中可以推导出来这些美妙的等式.

但要发现以下有很大数的等式并不容易：

$$\left(\frac{42\ 399}{13}\right)^3-\left(\frac{40\ 202}{13}\right)^3=\left(\frac{42\ 399}{50}\right)^3+\left(\frac{82\ 601}{50}\right)^3,\text{（境新氏作）}$$

$$\left(\frac{28\ 340\ 511}{21\ 446\ 828}\right)^3+\left(\frac{63\ 284\ 705}{21\ 446\ 828}\right)^3=28,$$

$$\left(\frac{415\ 280\ 564\ 497}{348\ 671\ 682\ 660}\right)^3+\left(\frac{676\ 702\ 467\ 503}{348\ 671\ 682\ 660}\right)^3=9.$$

[303]

第 5 节　三边和面积为整数的三角形

求三边和面积为整数的三角形的问题，无论在西方还是在日本都唤起了人们的兴趣. 特别是要求出在直角三角形中适合其条件的三角形，如在“求毕达哥拉斯数的方法”中所论述的那样，自古以来人们进行了很多研究.

设三角形的三边为 a,b,c，面积为 S，那么，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{，其中 } 2s=a+b+c$$

求整数解，可归结为解不定方程的问题.

另外，设直角三角形的三边为 x,y,z，那么，直角三角形为

$$x=2mn,y=m^2-n^2,z=m^2+n^2,$$

所以求出整数解 m,n 就可以了，这是人们所熟悉的.

但是，根据这些理论性的解来选择出完全的全部整数解是不可能的. 这是颇为耐人寻味的问题.

在日本，天明元年(1781 年)藤田贞资出版的《精要算法》中，列举了 116 个斜边为 1 000 以下且三边为整数的直角三角形. 人们以为这是全面的解答，至今的 175 年间没有一个人指出过它的缺点. 此外，今天还有把 1 000 以下的 116 个记为 131 个的文献.

和算著作不用说了，我还收集参考西方数学著作，制作了三边和面积为整数的三角形的如下表格.

因为个数相当多，所以限定在 100 以内来观察一下三边和面积为整数的三角形. 其中有"直"者为直角三角形. 括弧内的数字是，乘以它后面三角形的各边，使三边小于 100 的数字. 虽然说并不完美，但也是尽可能地从丰富的资料中收集而得到的结果.

序号					面积
1	(20)(直)	3	4	5	6
2	(6)	4	13	15	24
3	(7)(直)	5	12	13	30
4	(3)	3	25	26	36
5	(5)	9	10	17	36
6	(5)	7	15	20	42
7	(5)(直)	8	15	17	60
8	(3)	6	25	29	60
9	(5)	11	13	20	66
10	(3)	5	29	30	72
11	(4)(直)	7	24	25	84
12	(2)	8	29	35	84
13	(4)	10	17	21	84
14	(6)	13	14	15	84
15		4	51	53	90
16	(4)	12	17	25	90
17	(2)	19	20	37	114
18	(2)	16	25	39	120

[304]

19	(4)	13	20	21	126
20	(2)	15	28	41	126
21	(3)	11	25	30	132
22		13	40	51	156
23	(2)	15	26	37	156
24	(2)	10	35	39	168
25	(2)(直)	9	40	41	180
26	(2)	13	30	37	180
27		12	55	65	198
28	(3)	17	25	26	204
29		7	65	68	210
30	(2)(直)	12	35	37	210
[305] 31	(3)	17	25	28	210
32	(2)	17	28	39	210
33	(3)(直)	20	21	29	210
34		9	73	80	216
35		15	41	52	234
36	(2)	13	37	40	240
37		9	65	70	252
38	(2)	13	40	45	252
39	(2)	15	34	35	252
40	(2)	15	37	44	264
41		33	34	65	264
42		27	29	52	270
43		17	65	80	288
44		25	51	74	300
45		20	37	51	306
46	(直)	11	60	61	330
47	(2)	17	39	44	330
48		25	33	52	330
49		15	52	61	336
50	(2)	17	40	41	336
51		24	35	53	336
52	(2)	25	29	36	360
53		13	68	75	390
54		51	52	53	1170
55		11	90	97	396
56		34	55	87	396
57		20	51	65	408
58		14	61	65	420
59	(2)	21	41	50	420
60	(2)	25	34	39	420
61		25	39	56	420
62		26	35	51	420
63		26	51	73	420
64		26	73	97	420
65		41	50	89	420
66		19	60	73	456
67		25	38	51	456
68		39	58	95	456
69		17	55	60	462
70		35	44	75	462
71	(2)	25	39	40	468
72	(直)	16	63	65	504
73	(2)	29	35	48	504
74		17	87	100	510

75		29	60	85	522
76		20	53	55	528
77	（直）	13	84	85	546
78		28	65	89	546
79		29	52	75	546
80		21	61	68	630
81		25	52	63	630
82	（直）	28	45	53	630
83		26	51	55	660
84		33	41	58	660
85		33	58	85	660
86		29	52	69	690
87		51	53	100	714
88		32	53	75	720
89		37	39	52	720
90		34	65	93	744
91		17	89	90	756
92		25	63	74	756
93 (2)		39	41	50	780
94		41	60	95	798
95		21	82	89	840
96		21	89	100	840
97		35	52	73	840
98		51	52	97	840
99		22	85	91	924
100		25	74	77	924
101	（直）	33	56	65	924
102		35	53	66	924
103		39	55	82	924
104		40	51	77	924
105		31	68	87	930
106		29	65	68	936
107		29	75	92	966
108		41	50	73	984
109		34	61	75	1020
110		41	51	58	1020
111		36	61	65	1080
112		39	62	85	1116 [306]
113		38	65	87	1140
114		35	78	97	1260
115		37	72	91	1260
116		43	61	68	1290
117		41	66	85	1320
118	（直）	48	55	73	1320
119	（直）	36	77	85	1386
120		44	65	87	1386
121	（直）	39	80	89	1560
122		52	61	87	1560
123		44	75	97	1584
124		50	69	73	1656
125		41	84	85	1680
126		56	61	75	1680
127		57	65	68	1710
128		52	73	75	1800
129		53	75	88	1980
130		48	85	91	2016

131		61	69	100	2070	139	65	87	88	2640
132		60	73	91	2184	140	37	91	96	1680
133		61	74	87	2220	141	61	91	100	2730
134		57	82	89	2280	142	68	87	95	2850
135		51	91	100	2310	143	75	86	97	3096
136		68	75	77	2310	144	78	95	97	3420
137	（直）	65	72	97	2340	145	89	99	100	3960
138		65	76	87	2394					

综合上述，由 145 个基本形得了 244 个三角形，其中由直角三角形的 16 个基本形得了 52 个直角三角形.

并列两个直角三角形后构成一个等腰三角形，所以用上面所列举的直角三角形作等腰三角形后，就会得到下面的结果.

	(16)	5	5	6	12	(4)	14	25	25	168
	(12)	5	5	8	12	(2)	25	25	48	168
	(7)	10	13	13	60	(2)	18	41	41	360
	(4)	13	13	24	60	(1)	41	41	80	360
	(5)	16	17	17	120	(2)	24	37	37	420
	(3)	17	17	30	120	(1)	37	37	70	420
	(2)	29	29	40	420	(1)	53	53	90	1 260
[307]	(2)	29	29	42	420	(1)	65	65	66	1 848
	(1)	22	61	61	660	(1)	73	73	96	2 640
	(1)	32	65	65	1 008	(1)	72	85	85	2 772
	(1)	26	85	85	1 092	(1)	78	89	89	3 120
	(1)	56	53	53	1 260					

这样，得到 72 个三角形，与前面的合并在一起，由 145 个基本形得到了 316 个三角形.

当代数学水平是非常进步的，但有时也不知道问题如此简

单.这些问题最终也许在理论上会被完全地解决,这里仅论述至今为止作出判断的结果.

……………………………………………

[不可思议的三角形]

上表的(1)的各边乘以2后得

6,8,10

那么,这个三角形的周长为 $6+8+10=24$. 其面积为 $\frac{6\times8}{2}=24$,与周长相同的数.

与此具有相同性质的还有:

(3)3,12,13, (5)9,10,17,

(6)7,15,20, (8)6,25,29,

等.

[308]

第6章 计算Ⅰ

第1节 算盘史话

我们对于日常生活中使用着的算盘的知识相当缺乏.这里将简要地介绍算盘及其历史和二珠算盘等问题的研究成果.

1. 算盘

首先,关于算盘的意思,江户时代的学者小山田与清在《松屋外集》卷7"算学珠盘"中写到:

"所谓算盘是指珠串之意.又因珠子之鸣音而得名算盘."

所谓根据珠串或者声音起名为算盘的说法没有任何说服力.除此之外,没有一个人发表过与他相同的观点.

那么,关于算盘这个术语的解释,最早出现在文禄4年(1595年)天草的耶稣会出版的《拉丁语·葡萄牙语·日本语对照辞典》中,作为abaculus的对应术语翻译为"Soroban,Guinxenus Cazoyuruban".就是说,算盘是"算金钱的盘".

27年后,在京都出版的日本现存的最早的数学著作——毛利重能的《割算书》中把算盘叫做"算马".从那时以后出现各种各样的命名方法:

[309] 算马、算盘、珠盘、十露盘、十颗盘、将铲盘、数铲盘、算铲盘、乘铲盘、所六盘、定盘.

中国人一般叫做算盘，有时候也叫做珠盘. 有人认为，日本语中“算盘(そろばん)”是由汉语的发音演变而来，这种观点并不准确.



图1 现代中国算盘(35厘米×18厘米)

2. 什么时候开始使用算盘的

如后面将要介绍的那样，中国算盘的发明是在宋末元初的1200年. 后来，由于中国的交通也非常发达，商人便自然地把算盘带到了日本. [310]

毛利重能的《割算书》中把“九九”表①(如图2)记作：“二一天作五，四二天作五.”这里应该写“添作”，“天作”没有任何意思. 虽然没有任何意思，但由于珠算方面意思也能通顺的缘故，“添作”就被日本化为“天作”了. 日本国语专家山田孝雄通过语言学的考证得出了结论：中国的算盘大约在1622年前后传入了日本.

前面已经介绍过，在1595年出版的辞典中有算盘存在的最早的证据，今天也能看到在前田家里的前田利家跟从丰臣秀吉的时候在九州名护屋阵中曾经使用过的算盘.

也许由于日本的汉数字在计算中不方便，日本人从中国大量地引进了算盘. 另外，古代的奈良平安朝时代，已经开始使用了算筹和算盘.

① 这表是口诀，与“九九”不同.


八算之法
二一天作五
逢二進一十
三一三十一
三二六十二
逢三進一十
四一二十二
四二天作五
四三七十二
逢四進一十
五一加一

图 2 《割算书》中的"九九"


見四五十五 見五七十一 見六八十四
見七進一十
八歸見一下加二 見二下加四 見三下加六
見四添爲五 見五六十二 見六七十四
見七八十六 見八進一十
九歸下位加一倍 見九進一十
今有鈔二百六十五兩三錢二分問每人分鈔幾何
答曰假令滿作
二歸 二人分每人該鈔一百三十二兩六錢六分
三歸 三人分每人該鈔八十八兩四錢四分
四歸 四人分每人該鈔六十六兩三錢三分
五歸 五人分每人該鈔五十三兩六分四厘

图 3 《算法全能记》中的"九九"计算．

这是中国最古①的数学著作之一，据说在元、明时期出版

① 《算法全能集》不是中国最古的数学著作．

3. 中国算盘的发明

中国汉代,徐岳写了《数术记遗》.在该著作中有“珠算”(没有写“算盘”)的说明,但只有3行.他所说明的算盘与西方的阿巴卡斯(Abacus)非常相似. [311]

有人由此得出结论说,算盘是古代中国人发明的.但这里有疑问.

第一,徐岳的说明颇为简单,并不可靠.第二,有明确记载,《数术记遗》在唐代传入了日本,但在《四库全书目录》中说:现在的《数术记遗》是一本伪书.第三,在《数术记遗》以来的一千多年中,中国从未出现过一本解释算盘的著作.(笔者:日本珠算联盟编《割算书》解说,1956年.)

根据这些理由可以肯定地说,算盘的古代中国起源说是不可取的.

中国万历20年(1592年),程大位出版《算法统宗》以后,珠算方法得到了相当的普及.该书中记载了《盘珠集》和《走盘集》的两本书名.据说这些书大约是在公元1000年～1200年间出版的,但我们尚不知道它是否与算盘有关系.

《授时历捷法立成》(姜保编)是中国与算盘有明确关系的最早的文献①.该书的原著已经失传了,但朝鲜高丽忠烈王24年(1298年)出版过它的复制本.另外,朱世杰的《算学启蒙》(大德3年,1299年)失传后,也在朝鲜出版后得以流传到现在.

这两本书中有算盘的除法之“九九”,我们可以肯定地说,在1300年以前算盘已经存在了.

4. 算盘和阿巴卡斯(Abacus)

我一直认为“算盘是加减乘除四则运算的工具”,其中除法是最

① 据《朝鲜图书解题》(1919年)记载,在忠烈王24年《授时历捷法立成》从中国传到了朝鲜,之后在忠惠王4年(1343年)被出版.

重要的. 如果不会除法计算,那么就不能叫做算盘了. 这正是算盘与
[312] 西方的阿巴卡斯(Abacus)的区别.

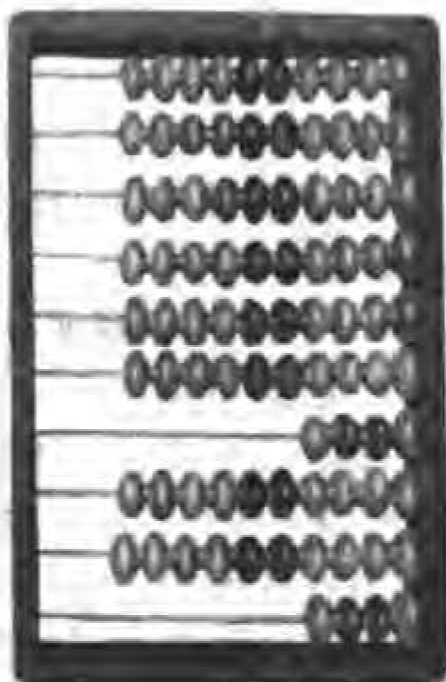


图 4 前苏联使用的阿巴卡斯(Abacus),有珠子为黑和白两种.

阿巴卡斯(Abacus)的横档上有10个珠,只进行加法计算. 苏联有的阿巴卡斯(Abacus)的横档上只有4个珠,这是由于在苏联的货币中有$\frac{1}{4}$单位,所以进行加法计算时非常方便.

如果用极端的方式说,不把珠子串在档上,而把10块小石放在一起也能完成阿巴卡斯(Abacus)的计算. 实际上,考古发现的古罗马的阿巴卡斯(Abacus)中,也有槽里放置小石的计算工具. 方才介绍过的《数术记遗》中所说的珠算也许是与此类似的东西.



图 5 前苏联农村妇女在使用阿巴卡斯(Abacus).(引自 Soviet Union)

5. 珠算的除法“九九”

珠算除法大致有归除法和商除法两种.商除法就是把笔算除法计算运行在算盘上的计算方法.该计算方法的立商需要思考,也花费时间.因此,人们发明了机械地、迅速地立商的归除法.今天的商除法是一般性的计算方法了,但无论是商除法还是归除法都在很早以前就有了.在古代归除法曾经非常盛行.

用归除法进行除法计算时,需要除法“九九”.当然还有与除法“九九”形式稍微不同的方法.江户时代达到了标准的计算方法有:

“[二之段] 二一天作五,二进一十 [313]

[三之段] 三一三十一,三二六十二,三进一十

[四之段] 四一二十二,四二天作五,四三七十二,四进一十

[五之段] 五一加一,五二加二,五三加三,五四加四,五进一十

[六之段] 六一加下四,六二三十二,六三天作五,六四六十四,六五八十二,六进一十

[七之段] 七一加下三,七二加下六,七三四十二,七四五十五,七五七十一,七六八十四,七进一十

[八之段] 八一加下二,八二加下四,八三加下六,八四天作五,八五六十二,八六七十四,八七八十六,八进一十

[九之段] 九一加下一,九二加下二,九三加下三,九四加下四,九五加下五,九六加下六,九七加下七,九八加下八,九进一十.”

这是一位数的除法歌诀,其中除天作、进、加、加下这四个词外,都是数字.“天作”应是“添作”,“加下”应是“下加”. [314]

前面已经介绍了关于天作的问题,在进行如 $1\div2=0.5$,$2\div4=0.5$ 的完全除尽的除法运算的情况下,下放其位,使它作天作的五就可以了.由于把算盘的上部叫做天,所以才出现了天作的

说法.

二进一十，就是除数为二以上时，舍去二，然后进位到一十位置的意思.

三一三十一，三二六十二等为

$$10\div 3=3\cdots余1, 20\div 3=6\cdots余2$$

因此，它们有把其位的 1 或 2，3 或 6 作商，把余数 1 或 2 加到下位的意思.

五一加一，五二加二等为

$$10\div 5=2, 20\div 5=4$$

因此，它们的意思就是：10 除以 5 时，其 1 上加 1 作商，20 除以 5 时，其 2 上加 2 作商就可以了.

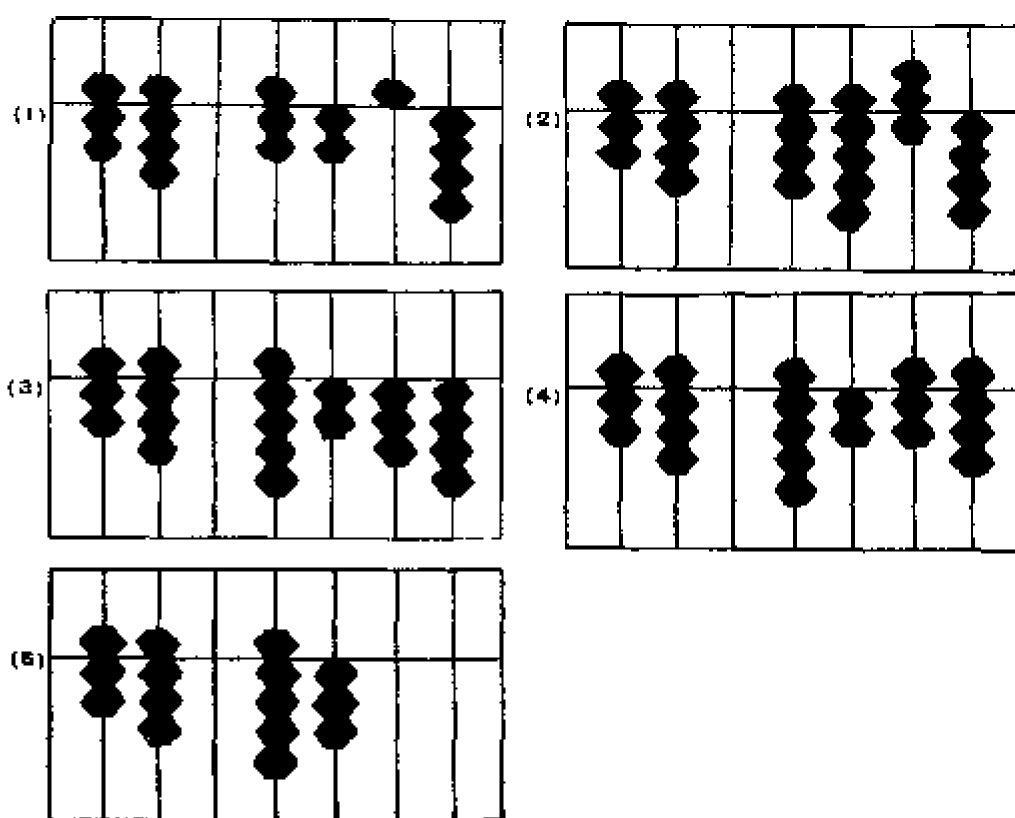


图 6

六一加下四，在中国读作“六一下加四”．“加下”没有任何意思．而是“六一下上加到四”的意思．前面介绍的毛利重能的著作中有“加下”，多数人也同意他的说法，但也有人不

同意.

又如，六一加下四，八二加下四，

10÷6=1…余数 4，20÷8=2…余数 4

它们的意思就是：如果 10 除以 6，20 除以 8，其商不变，余数都是 4.

算盘上运行这些计算，就能够进行一位数的除法计算.

2 位数以上的除法计算，用上位的 1 位数除后立商，再用下位乘，因为除尽，所以减掉就可以了. 但是，对于如

12÷11，23÷21

上面的除法计算“九九”就不适合了. 在这种情况下，用“归一倍一”、“归二倍二”等“九九”读法. 对于这种情况，把前面的“九九”叫做“八算”. [315]

由于上面计算的解释需要冗长的篇幅，所以应在专业书中介绍. 下面我们要介绍“二珠”算盘.

6. 二珠算盘

中国最近开始使用了梁上一珠梁下四珠的与日本相同形式的算盘，但以前他们使用的是梁上二珠梁下五珠的二珠算盘.

二珠绝对不是一种装饰. 发明算盘的动机在于这个二珠上.

算盘传入日本以后，在江户时代的初期，虽然变成一珠算盘，但专业数学家们长期使用了二珠算盘.

用汉数字一、二、三等进行除法计算时非常麻烦. 加之算筹和算盘在日常生活中起不了作用. 因此，必须想方设法要发明迅速计算的算器. 适应这个目的的算器就是算盘.

用算盘实现 1 位数的除法运算后，试作了 2 位算盘的除法“九九”.

例如，如果除数是 78

100÷78=1…余数 22，200÷78=2…余数 44

300÷78＝3…余数 66，400÷78＝5…余数 10

500÷78＝6…余数 32，600÷78＝7…余数 54

700÷78＝8…余数 76.

因此，作适合它的"九九"就可以了. 今天就没有作这种"九九"的必要了，下面用与 1 位除法相同的要领试一试 78 的除法运算.

在 7254÷78 中，首先看 7，以 8 作商，把余数 76 加给下位的结果就是(2).(2)的下位是 9，11，4. 在 9 和 11 中，1 个 78 被包
[316] 含，所以把它提到上位的结果为(3).

在(3)中看 2，仍然以 2 为商，把余数 44 加到下位，那么下位为 7 和 8. 把这个 7 和 8 提到上位的结果得(5). 这样除法运算就结束了.

如(2)上看到的那样，1 位运算中也出现余数为 10 以上的情形. 这就是出现二珠算盘的需要和理由.

但是，这种方法中"九九"的个数非常大，记忆全部是不可能的. 所以，日本国没怎么使用它.

虽然现在计算平均值时这种方法非常方便，但遗憾的是日本早已不销售二珠算盘了.

关于上述内容，请参考日本珠算联盟编的《割算书》中的山田孝雄、平山谛的解说.

7. 商除法

[317] 商除法自古以来有之，但到最近才开始盛行起来. 曾经在新泻地区非常流行，当地人把它叫做"龟井算". 关于为什么新泻地区商除法那么流行有一个传说：宽永 7 年(1630 年)百川治兵卫被流放到佐渡岛的时候，在新泻地区传播了商除法. 除此以外，在百川治兵卫没有其他推广商除法的确切记载.

一般地，百川忠兵卫的《新编诸算记》(明历元年，1655 年)被认为是商除法的开端. 这是百川治兵卫被流放到佐渡岛过了 25 年以



图 7 百川忠兵卫的《新编诸算记》.

后出版的著作.这是否混淆了"忠兵卫"和"治兵卫"两人呢？从治兵卫写的《诸勘分物》(元和 8 年,1622 年)和忠兵卫写的《新编诸算记》的年代和内容可以看出它们并不是同一个人的著作.

《新编诸算记》的扉页中有《新编算记》,这原来是一册书,但把 [318]
它分成三册,并把书名改为《龟井算》.这可能是书店为了销售书而做的事.

《新编诸算记》的全部内容都说明了商除法,但在其序言中说(如图 7)：

"除今八算见一外,重作此新法.……百川忠兵卫"

由此可以看出,商除法是由百川忠兵卫发明的.出版《新编诸算记》只过了 4 年后,山田正重出版了《改算记》(万治 2 年,1659 年).其中有归除法和商除法的说明：

"龟井割(除法),谓之九九引算盘,自古有之.非当代人之作."

这可能是山田正重看到《新编诸算记》后发表的言论.

这样,就更说不清楚商除法的历史了.

8. 16 除的"九九"

发明算盘的动机是为了加速除法运算. 由于当时经常需要1斤和160匁之间的换算, 所以《算学启蒙》(1299年)中出现了16除之"九九". 如下面的照片所示, 叫做"斤下留法".

1÷16=0.0625, 2÷16=0.125, 3÷16=0.1875,

4÷16=0.25, 5÷16=0.3125, 6÷16=0.375,

7÷16=0.4375, 8÷16=0.5, 9÷16=0.5625,

10÷16=0.625, 11÷16=0.6875, 12÷16=0.75,

[319] 13÷16=0.8125, 14÷16=0.875, 15÷16=0.9375.

只写下了这些"九九". 最初的1的情形下的"退"表示降低一位的意思. 其余都有"留", 表示把数位就定在那个位上的意思. 当用16除时, 把数分别置在算盘上就可以了.

这种16除之"九九"出现在日本的《割算书》(1622年)等书中,

斤下留法

一退六二五 二留一二五

三留一八七五 四留二五

五留三一二五 六留三七五

七留四三七五 八留单五

九留五六二五 十留六二五

十一留六八七五 十二留七五

十三留八一二五 十四留八七五

十五留九三七五

明纵横诀

图8 引自《算学启蒙》. 这是在朝鲜用木制活字印刷的书影.

但几乎没有能够进行下来.

第2节 算筹和算盘

前面介绍了算盘,下面论述中国和日本曾经使用过的计算工具——算筹和算盘.

1. 结绳

古代中国、墨西哥，还有日本的江户时代的骏河和能登曾经有过结绳，冲绳直到最近也有过结绳. 这幅照片（如图9）是在大正年间冲绳人制作的结绳. 有6种，它们有不同的意思. 根据米、豆、酒等东西的特点制作出了不同形状的结绳，而且根据结绳的粗细区别它们的单位. 当表示数字时，根据结口的数或绳子的条数来确定.

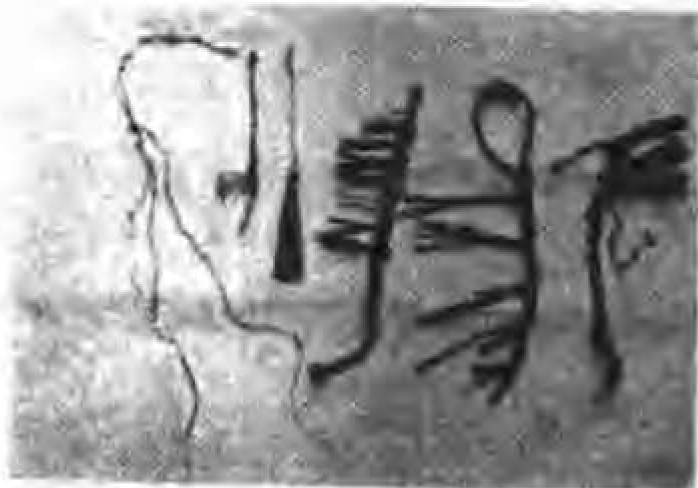


图9 冲绳本岛的结绳.(矢袋喜一氏作)

这是用麦秸或草制作的长度大约为20厘米的结绳.制作结绳的目的,与其说是为了计算,倒不如说是为了便于记忆. [320]

2. 算筹

结绳以后，接踵而来的是算筹. 有时候把算筹叫做竹策. 原

来是用竹子作的棍儿. 朝鲜把用兽骨或羊齿[1]制作的算筹一直保留到最近. 简而言之,算筹或竹策就是用棍儿进行加减计算的原始工具.

如文字所表示的那样,在东洋计算是源于竹子的东西."算"这个字的原来写法是"筭",有摆弄竹子计算的意思.

另外, 曾经有过现在完全不使用了的汉字 "祘", 它有 "看"、"数数" 的意思. 日本的词典里又解释为 "并放的竹子".

"算"还有一个解释."筭"的读法也与"算"相同,有"篮子"或"用竹子作的容器"的意思.

这些都是古代中国人用竹子制作的算筹作为计算工具的有力证据.

与中国相反,西方人的计算与小石块有关系.

前面介绍过的阿巴卡斯 Abacus 的语源,辞典中解释为 pebble (卵石),small stone(小石子).

由此可见,计算在西方开始出现的时候可能使用了小石块.

我们并不清楚算木和算筹究竟有什么区别,但是算木有正负之别. 关于算筹是什么时候开始出现的,最早记载在周代(公元前 1122—250)的《春秋左氏传》周襄公(公元前 651—619)条中. 即绛县老人问及年龄时,就把自己名字的"唐亥"的"亥"字用以下方式表示的.

"亥"字是由以下几个式子组合而成的.

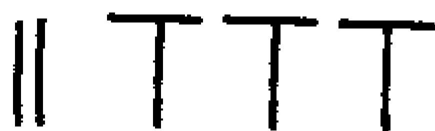


图 10

这就是 2 666. 2 666 还少一位数,因此在下位上填一个 0 后就

① "羊齿"的日文原文为"齿朵",是一种植物.

是老人的年龄 26 660 天[1]. [321]

由此可以看出,中国人在公元前几百年前就开始使用算筹数数,并用不同的形状表示不同的数了.

3. 算木与算盘

算木是宽为 3 毫米的方形,长为 4 厘米的棍. 在板子或纸上布列来表示数字,1 位、100 位、10 000 位、……数字的表示原则为



图 11

10 位、1 000 位、……数字的表示原则为

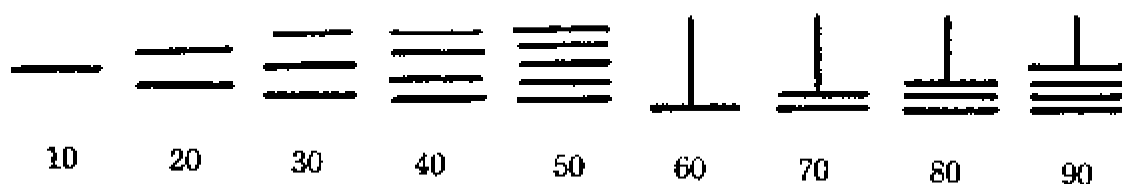
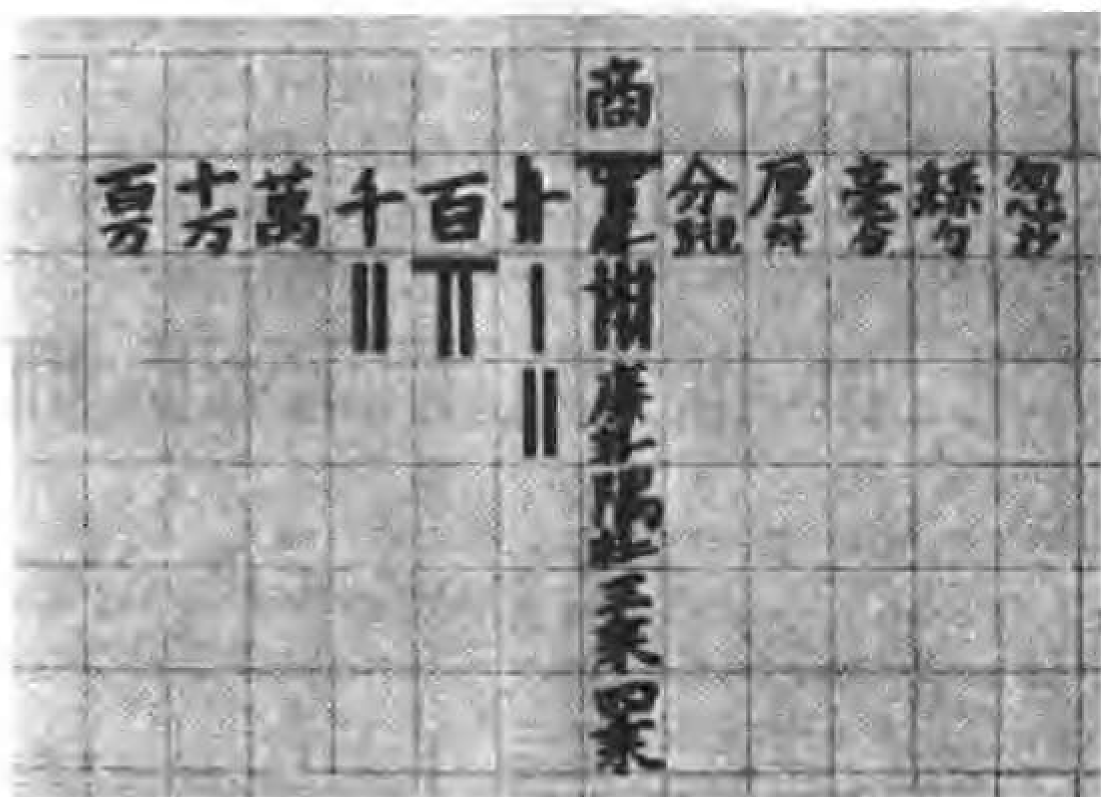


图 12

---

① 中国古典名著《春秋左传》中有这个数学故事：二月二十三日,晋悼夫人赐给为杞国筑城的役卒吃饭,绛县人中间有一个人年纪已经很大了,没有儿子而自己前去,给他吃东西. 有人怀疑他的年龄,让他说说他的年龄. 他说:"下臣,是小人,不知道集录年龄. 下臣生的那一年,是正月初一甲子日,已经过了四百四十五个甲子日了,最末一个甲子日到今天刚刚二十天."官吏到朝廷里询问. 师旷说:"这是鲁国的叔仲惠伯在承筐会见郤成子的那一年. 这一年,狄人攻打鲁国,叔孙庄叔当时在咸地击败狄人,俘虏了长狄的侨如和虺(hui)、豹,而都用来命名他儿子. 满七十三岁了."史赵说:"亥字是'二'字头'六'字身,把'二'拿下来当作身子,这就是他的日子数."士文伯说:"那么是二万六千六百六十天了."(引自:沈玉成译:《左传译文》,中华书局,1997 年,第 361 页.)

由于排列相同的棍会造成混乱，所以采用纵横相间的方法．算盘上实际运行的时候，不一定这样做．（请见图 13）



[322]

图 13

算木有黑红两种颜色．红色表示正数，黑色表示负数．在纸上写或印刷时，因为黑红两色不方便，所以画斜线来表示负数．

12036　　−23　　−3650

图 14

使用算木计算的纸或板叫做算盘．上面照片中横向是表示取位方法：

百万，十万，万，千，百，十，一，分，厘，……

纵向是表示未知数的次数：

商（答），实（常数），方（x），廉（x^2），隅（x^3），三乘（x^4），四乘

(x^5)，五乘(x^6)，……

这个命名为

商，实，方，廉，二乘，三乘，……，隅. 因此，照片中表示的方程为

$$-16+2\ 713x-21x^2+x^3=0.$$

（遗憾的是照片中没有写红黑色的区别）还特意不写“=0”. 这里特别引人注意的是正和负的思考方法. 古代中国人在世界上最早提出了正负数的思想. 流传到今天的中国最早的数学著作《九章算术》（公元1世纪）中说：

“正算赤，负算黑，否则以邪正为异.” [323]

邪正是表示斜和垂直，虽然有些不清楚它的意思，但即使在不写红色和黑色的情况下也有区别正负的其他方法.

《九章算术》中明确地提出了正负数的运算法则. 这是一个非常重要的成就，它说：

“正负术曰：同名相除，异名相益，正无人负之，负无人正之，其异名相除，同名相益，正无人正之，负无人负之.”

与现代语言表达不同，同名指的是符号相同，异名指的是符号相反，除是减的意思，益是加的意思. “无人”是什么也没有的意思，就是表示0.

下面解释其前半部：

“正负术曰：同名相除，异名相益.”

设a，b为正数，那么

$$a-b=a+(-b),$$

$$(-a)-(-b)=-a+b.$$

减符号相同的数相当于加符号相反的数. 当a，b的符号为负时，运算原则也相同. 其后半部为：

“正无人负之，负无人正之，其异名相除，同名相益，正无人正之，负无人负之.”

意思是说

$$0-b=-b,$$
$$a-0=a.$$

《九章算术》中,介绍"正负术"又提出了乘法法则:

"同名相乘为正,异名相乘为负."

它的意思就是

$$(+a)\times(+b)=+ab,(-a)\times(-b)=+ab,$$
[324] $$(-a)\times(+b)=-ab,(+a)\times(-b)=-ab.$$

由此可以看到,在中国 2 000 年以前的古代已经发现了正负数概念及其运算法则.

从西方数学史中知道,古代希腊和罗马数学中没有出现过正负数概念.负数概念在印度出现后经过阿拉伯,在 13 世纪传到了欧洲.印度记载负数概念的最早的文献是 Brahmagupta(598 年生)的"Brahmagupta-Siddhanta",但它晚于《九章算术》500 多年.

《九章算术》时期,确立了正负概念,已经达到用算筹和算板解答 2 次、3 次方程的水平,这就是 1 000 年以后宋元时期的天元术,即现在代数学的基础,请允许我在别处再介绍.

4. 在日本的传播

从日本历史典籍中看到,在奈良和平安时期中国大陆文化开始传入日本.就是说,钦明天皇 15 年(554 年)和推古天皇 10 年(602 年)①,从朝鲜传进来了数学、历法和天文学知识.这样算筹和算盘的计算方法也随之而来,并为计算发挥了作用.

鸭长明的《发心集》第二卷中说:

"某时,客人光临那堂时,置算给人见,……"

其中的"置算",就是在算盘上放置算筹计算的意思.即使现在的日本东北地区,解答问题叫做"置问题",这可能是由"置算"

① "推古天皇 10 年(602 年)"应为 11 年,或 10 年应改为 601 年.不知何者正确.

转变而来的.

关于平治之乱(1159 年)中被杀害的藤原通宪(信西)的事件,《愚管抄》第 5 卷中说: [325]

"信西,为大内营造之后,得好时光,喜事不断,诸国七道少无烦,仅二年作出.其夜间置算,至后夜,听到算之声音."

藤原通宪只用两年时间营造了皇宫,在那期间自己用算筹和算盘计算到深夜.计算技术达到了相当熟练的程度,也没有诸国的征税,因而度过愉快的生活.

这样,在奈良和平安朝时代从中国唐朝引进的数学,到战国末期人们完全遗忘了.江户初期,再次从中国引进数学,并创造了日本特有的和算.

和算在明治维新时期被西方数学所代替是历史的必然.但日本没有能够直接吸收西方数学,而是通过中国清朝引进了西方数学.在这个意义上说,日本从中国三次引进了数学.中国清代,早已引进西方数学,并翻译了许多易于阅读的数学文献.

仅就数学方面来说,日本人三次享受到了中国的恩惠.

……………………………………………………………

请注意本章第 3 节"算盘和算筹"中关于算筹表示数字的方法.12 036 的中间的 0,由于算筹没有 0 的符号,只用空位来表示.这与印度·阿拉伯数字不同.

但是,用算筹表示的数字,与印度·阿拉伯数字的结构相同,都是根据位置制来记数的.这比希腊数字和罗马数字优越得多.

用下面的文字来表示希腊数字

$$\alpha',\beta',\gamma',\delta',\epsilon',\zeta',\varsigma',\eta',\theta'$$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

10 位、100 位、……的数字,必须重新造出来才行. [326]

罗马数字的表示为

Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅵ, Ⅶ, Ⅷ, Ⅸ, Ⅹ

一直到 X(10),利用这个 X 以稍微简单的方法表示了 10 位数,但仍然劣于印度·阿拉伯数.

汉字"零"也没有能够像印度·阿拉伯数字那样完全加入数字的行列.例如,中国元代的《算学启蒙》(1299 年)把 10 001 表示为"一万单一".

江户时代初期的数学著作中,用弹、欠、下、超等文字来表示零.《尘劫记》中把 12 036 表示为"一二下三六".它断言零不是数字.

结果,江户时代没有出现能够明确说明零的数学家,而且他们都认为零是一种符号.

第 3 节　开平方的方法

1. 算盘与算筹

今天的数学中不能没有开平方的方法.但是,从历史上看,那么发达的古希腊和古代中国数学中没有能够发现正确的开平方的方法.无论是在古代希腊还是古代中国在当初都使用了近似计算方法.

$$a\pm\frac{b}{2a}>\sqrt{a^2\pm b}>a\pm\frac{b}{2a\pm 1}①.$$

对我们来说,这种近似计算方法早已没有必要了.后来没有
[327] 过多久,中国人发明了用算筹和算盘计算的方法,作为解 2 次方程的方法的特别情形来计算开平方.在下面的照片中写的是求 15 129的平方根的计算方法,这是从日本古代数学书的用算筹和算盘开平方的说明中引用的。

中国人长期使用这种方法.江户时代初期,日本从中国引进了数学,最早出版的数学书是吉田光由的《尘劫记》.在该书的宽

① 这个表示原来是用文字叙述的,是在算筹出现后的事情.

永 11 年(1634 年)版中,有下面的照片(图 16),其中有四个算盘,用算筹和算盘的相同计算方法开了平方根.

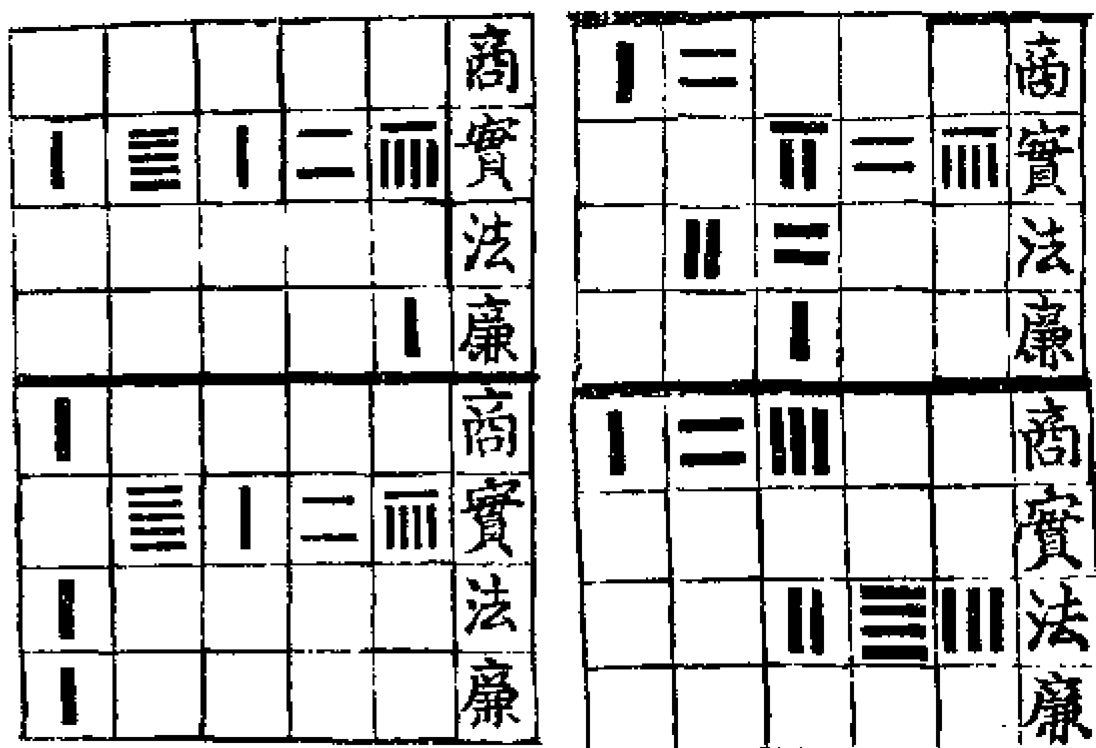


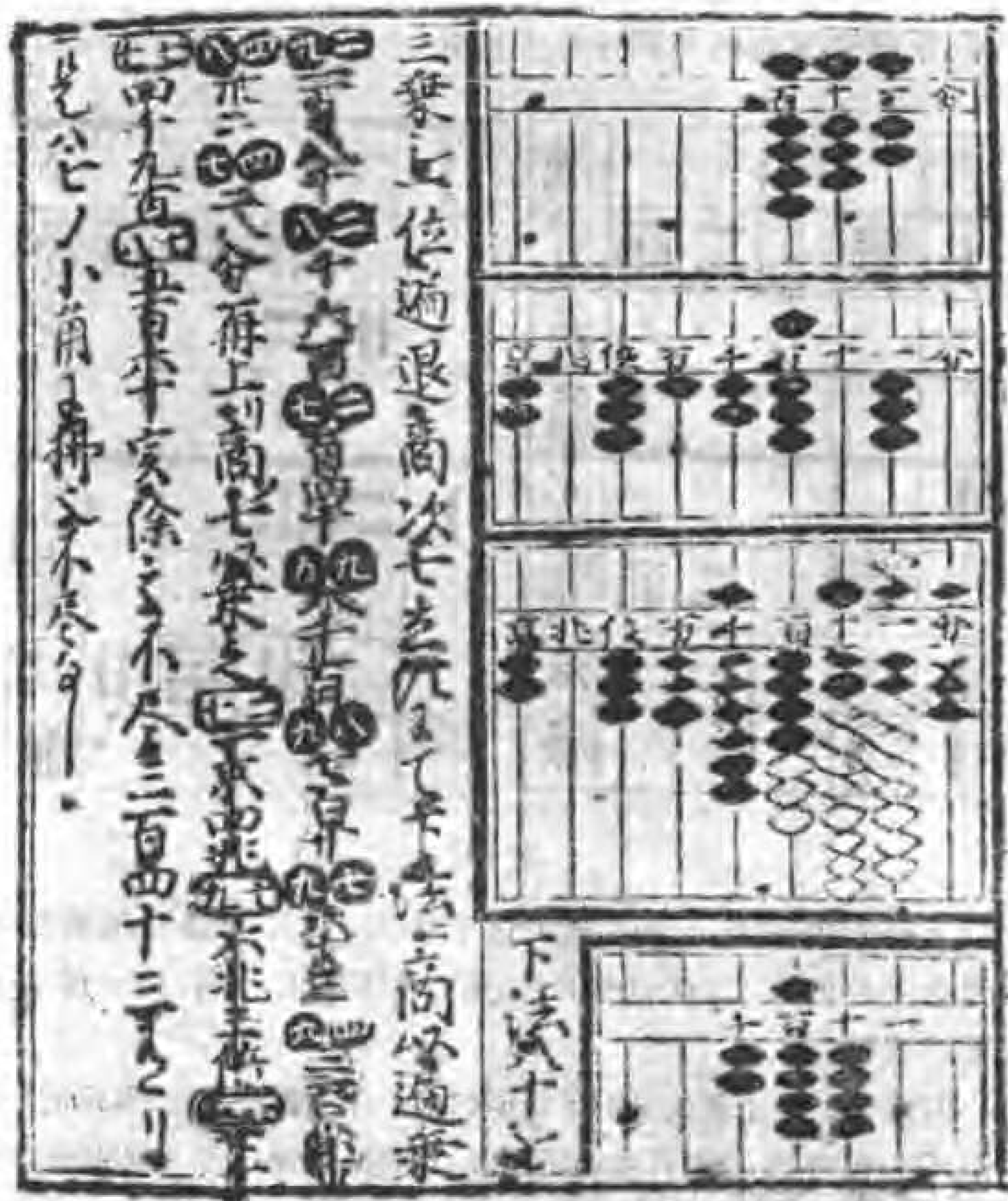
图 15

吉田光由用朱和墨印刷了这个说明.照片中清楚地看到算盘和涂颜色的数字,这也是日本国二色印刷的开端,是一件非常重要的事件.

但是,没有过多久,明历 3 年(1657 年)藤冈茂之撰写的《算元记》中,也出现了用算盘开平方的说明.享保 7 年(1722 年)镰田俊清写的《宅间流圆理》中计算到 82 位数:

$\sqrt{0.5}$=0.707 106 781 186 547 524 400 844 362 104 849 039 284 835 937 688 474 036 588 339 868 995 366 239 231 053 519 4 [328]

这就是用算盘进行的开平方计算.古代日本人在开平方的时候使用了算盘.也许有人以为用算盘开平方如表演魔术,实际上用算盘开平方的原理非常简单,而且很快就会掌握.用算盘也可以开立方,叫做"三分之一九九之法",但用算盘开立方非常繁琐.



[329] 图 16 宽永 11 年版的用二色印刷的《尘劫记》.

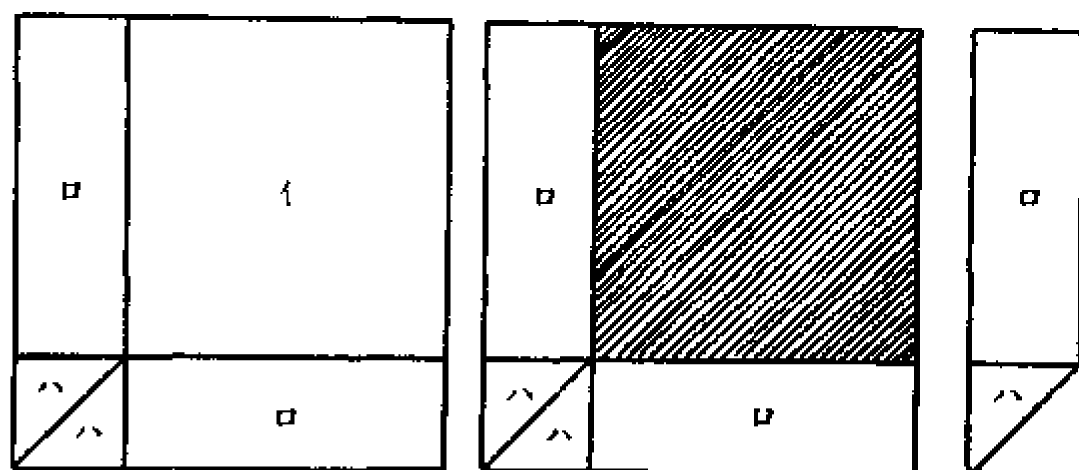
2. 算盘开平方

在算盘开平方中，如图 17 所示，需要"半九九". 中国没有这种方法. 在日本的藤冈茂之的著作(1657 年)中第一次给出这种方法，但并不清楚是谁发明的.

"一一半，二二二，三三四半，四四八，五五十二半，

六六十八，七七二十四半，八八三十二，九九四十半.”这里没有必要说明这个“半九九”的结构，“半”有 0.5 的意思.

下面要用算盘图说明 144 的开平方方法. 其顺序如下.



(1)	初商 1		1 4 4
(2)	初商 1		4 4
(3)	初商 1		2 2
(4)	初商 1	次商 2	2

图 17

首先，以每 2 位为单位分开来确定答数的位数. 开最上面的 1 位确定初商，由此减得(2). 把余数除以 2 的结果就得(3). 与前面 [330]
的图比较后，会很容易地明白它的意思. 其次，用初商的 1 除 22 的上位的 2，这样确定了次商 2. 从上位的 2 减去 1×2=2 得 2. 再使用次商的 2 读“二二为二”的“半九九”来结束开平方计算.

再举一个例子说明.

在 390 625 的开平方计算中，首先以每 2 位为单位分开，确立商 600. 确定初商 600 时看到 2 乘数(平方数). 确定次商 20 时，看作把余数除以 2 的 153…的首位除以初商 600. 确定下一

个商 5 时，看作 311…除以 600.

确定 600	39|06|25
减去 2 乘	36 00 00
除以 2	3 06 25
620	1 53 12.5
减 600×2	1 20 0
减 22　2	2
625	31 12.5
减 620×5	31 00
减 55　12.5	12.5
	0

从图 18 中容易理解商的确定方法和“半九九”的使用方法.

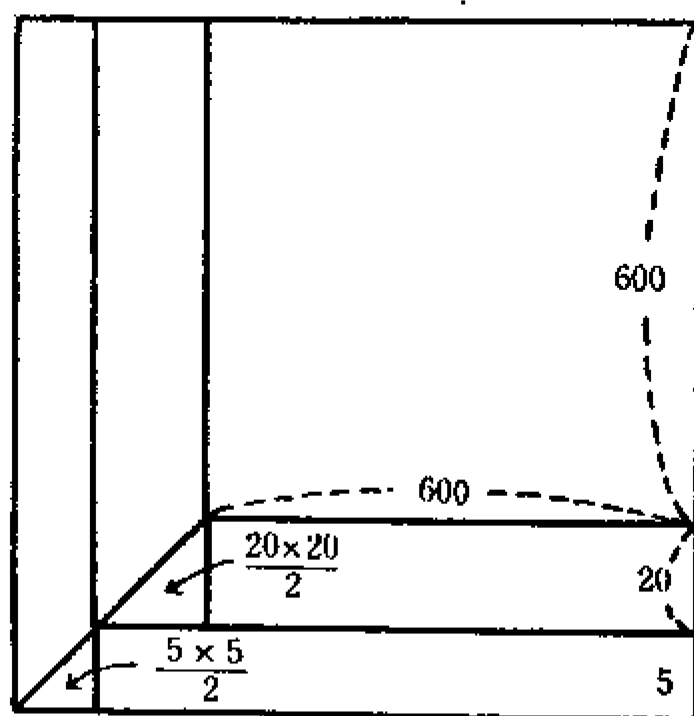


图 18

日本江户时期的数学家，用算盘开平方时就使用了这种方
[331] 法，而不是在纸上计算的. 此外，由于用算筹和算盘计算很复杂，所以没有怎么实行.

图 19 文正 13 年(1830 年)①出版的长谷川宽阅，千叶胤秀编的《算法新书》的算盘开平方法之说明. [332]

① 此年也是日本天保元年.

3. 用算盘解 2 次方程

解方程是数学中的最重要内容之一，尤其是在重视计算的中国和日本更是如此.

中国的汉代，就已经会解 2 次、3 次方程了. 到唐代以后，能够处理 4 次、5 次方程[①].

公元 11 世纪的宋代，几乎能够解答任何次数的数字系数方程.



图 20

江户时代初期（17 世纪初期）中国数学传入日本以后，关孝和完成了数字系数方程的解法. 因为这是使用算筹和算盘的方

① 中国唐代不能解 5 次方程.

法.所以另行介绍,这里只介绍用算盘解答 2 次方程的实际的物证.

其一是"带纵开平法",如图 20 所示:

"积 285 步,横比纵少 4 步,问纵横各几何?" [333]

设纵为 x,那么,横为 $x-4$.

故 $x(x-4)=285$,

故 $x^2-4x-285=0$.

图 20 的照片内容就是该方程的实际解答过程.

算盘解法中,由于项的正负的不同而解法也有所不同.因此,特别地称之为"带纵开平法"①.

4. 木匠的开平方法

作为实际问题,开平方方法对木匠来说也是非常重要.例如,把圆木锯成方木时必须要知道方木的尺寸.设计屋顶椽子等工作中不用开平方而是需要开立方的计算.

(i) 曲尺的利用

曲尺是古代中国自古以来一直使用的尺子,古代人用铁制作了曲尺,所以也叫做铁尺.古代中国人把圆规叫做规,把曲尺叫做矩.

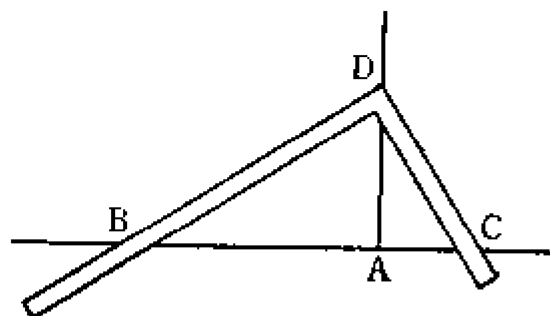


图 21 木匠的折尺.

首先,作互相垂直的两条直线 BC,AD,取 $AC=1$,使它等于 AB 的平方根.如图 21 所示,放置曲尺后,AD 就是所求的长度.

其理由是

$$AD=\sqrt{AB\cdot AC}.$$

① "带纵"是指边长不等,即纵比横长,不是项的正负不同.

[334] (ii) 直角三角形的利用

实际开平方时，有时利用直角三角形的性质. 设直角三角形 ABC 中 C 为直角，

$$\text{斜边 } AB=\frac{n+1}{2}.$$

$$\text{高 } BC=\frac{n-1}{2},$$

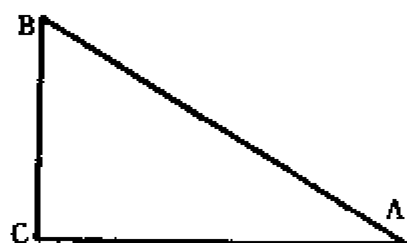


图 22

则

$$\text{底边 } CA=\sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}=\sqrt{n}.$$

例如，开 625 的平方时，如果取 $n=625$，

那么

$$AB=313,\quad BC=312.$$

这就相当于作了分别以 AB，BC 为斜边和高的直角三角形，所以测量直角三角形的底边就可以了.

当 n 为偶数时，可以取

$$AB=\frac{n}{2}+1,\quad BC=\frac{n}{2}-1.$$

日本的木匠在只有曲尺的条件下完成各种有关工作. 只用曲尺也能够制作正五边形、正八边形、正十边形等. 把这种技术叫做“规矩术”. 关于这一点另作论述.

[335] (iii) 曲尺的正反面

仔细观察木匠的曲尺后可以发现其正反面有不同的刻度. 近来曲尺的正面有以尺寸为单位的刻度，反面有以厘米为单位的刻度，反面刻度的目的不只是这些.

正如图 23(2)所表示的那样，反面刻度比正面刻度稀疏. 它们的稀疏程度为正面的 1 刻度相当于反面的 $\sqrt{2}$ 刻度. 这是等腰直角三角形的直角边和斜边的比例关系.

设，如果正面的刻度以寸(尺)为单位，那么，反面的 1 个刻度为 1 寸(尺)(实际上变长了)，如图 23(3)，如果测量圆木直径

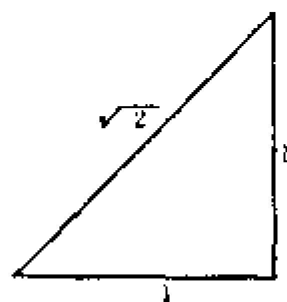


图 23(1)

的话，其刻度数就是从圆木取出的方木的一边长度. 按图 23 所示测量的话，能够取出来 2 寸 8 分的方木.

现在不能肯定这个方法是否是从中国传进来的，日本最早是在《尘劫记》（宽永 11 年，1634 年）中出现的.

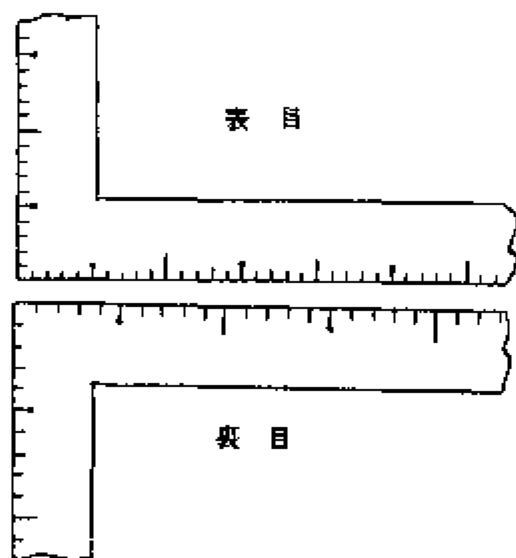


图 23(2)

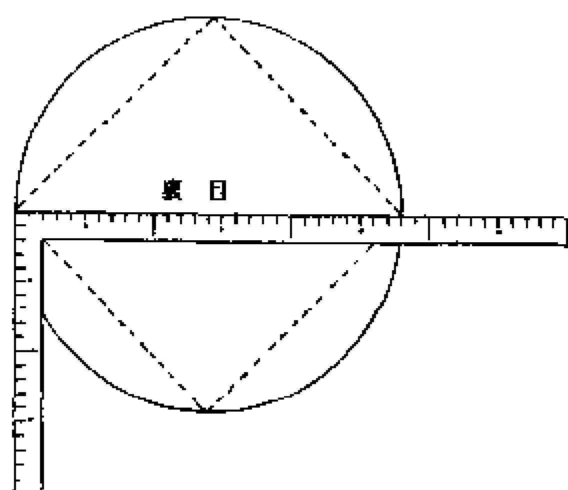


图 23(3)

5. 女子平方

宽保 3 年（1743 年）中根彦循的《勘者御伽双纸》中以“女子平方”的题目提出：

“例如，今开积为二十五寸之平方，问商为几何？

答曰：五寸.

法曰：置积，减一寸其商一寸，次减三寸其商二寸，次减五寸商三寸，次减七寸商四寸，次减九寸商五寸. 至此积无余数，故答曰商为五寸也.” [336]

对现代人来说，不好理解这个说明. 下面详细说明它的原理. 所谓“女子平方”就是连女子都会解答的简单问题的意思.

首先，

$$1=1^2;$$
$$1+3=2^2;$$
$$1+3+5=3^2;$$
$$1+3+5+7=4^2;$$
$$1+3+5+7+9=5^2;$$
$$1+3+5+7+9+11=6^2;$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

众所周知，从 1 开始连续相加的奇数之和成为平方数."女子平方"的方法就是从逆向应用了这个原理，从 25 开始逐次减，

$$25-1=24,24-3=21,$$
$$21-5=16,16-7=9,$$
$$9-9=0,$$

第 5 次的余数为 0，所以答案为 5.

小数的情形有些不同.《勘者御伽双纸》中也有小数情形的说明，但由于其原文冗长，这里就省略了.

现在要考虑小数的平方.取相邻的 2 个数的差.

	差
$3.0^2=9.00$	
$3.1^2=9.61$	0.61
$3.2^2=10.24$	0.63
$3.3^2=10.89$	0.65
$3.4^2=11.56$	0.67
$3.5^2=12.25$	0.69
$3.6^2=12.96$	0.71

差的小数点后第二位数字从奇数开始，以 2 个为单位增加.
[337] 开平方时利用它们.

例如，开 12.25 的平方.把整数部分如前面的方法处理得，

$$12.25-1=11.25,$$
$$11.25-3=8.25,$$

$$8.25-5=3.25.$$

下一个奇数为 7，已经不能减了，所以整数部分为 3.

整数部分 3 上加 0.1，再进行如下计算

$$3.1^2-3^2=0.61.$$

开整数部分的平方后由余数 3.25 转移到下面的计算：

$$3.25-0.61=2.64,$$

$$2.64-0.63=2.01,$$

$$2.01-0.65=1.36,$$

$$1.36-0.67=0.69,$$

$$0.69-0.69=0.$$

这样余数为 0 了. 减 5 次后余数为 0，所以小数部分为 0.5，与前面的整数部分相加后 3.5，即所求.

计算 $\sqrt{5}$.

$$5-1=4,4-3=1.$$

于是整数部分再不能减了，所以整数部分就是 2. 下面作

$$2.1^2-2^2=0.41.$$

然后继续前面的计算

$$1-0.41=0.59,$$

$$0.59-0.43=0.16.$$

由于 0.45 大于 0.16，所以小数的第一位为 0.2. 下面作

$$2.21^2-2.2^2=0.044\ 1.$$

然后继续前面的计算

$$0.16-0.044\ 1=0.115\ 9,$$

$$0.115\ 9-0.044\ 3=0.071\ 6,$$

$$0.071\ 6-0.044\ 5=0.027\ 1.$$

由于 0.044 7 大于 0.027 1，所以把小数第二位确定为 0.03. 下面作

$$2.231^2-2.23^2=0.004\ 461,$$ [338]

然后继续前面的计算. 上面的计算已经判明为 $\sqrt{5}=2.23$.

这是江户时代日本人发现的“女子平方”方法，现在用先进的计算器或电动计算机开平方时应用的正是这种方法.

……………………………………………

附录　用折尺开立方

使用两把曲尺后能够开立方根.

首先，作相互垂直的两条直线 BAE，DAC. 取 $AB=1$，使它等于 AC 的立方根.

将 2 根曲尺如图 24 所示那样放置，曲尺刻度上取 B 和 C，然后，从曲尺直角引 AD、AE.

于是有

$$AD=\sqrt[3]{AC},$$

故，在三角形 BDE 中有

$$AD^2=AB\cdot AE,$$

又在三角形 DEC 中有

$$AE^2=AC\cdot AD,$$

由上面两式得

$$AD^3=AB^2\cdot AC,$$

然而，$AB=1$，故

[339] $$AD^3=AC,$$

即　$$AD=\sqrt[3]{AC}.$$

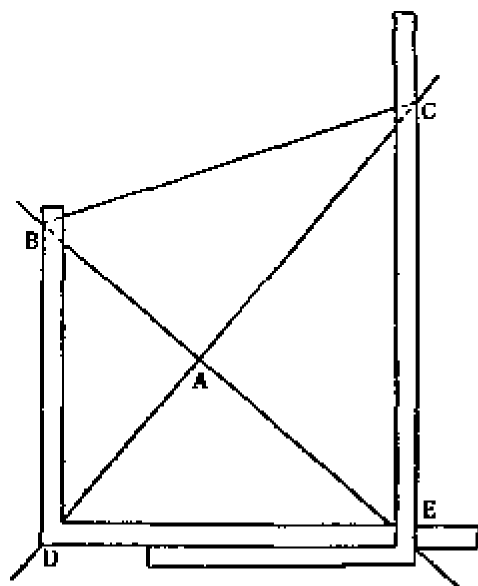


图 24

第 4 节　对数史话

1. 对数表的用途

在 340 年前英国人纳皮尔（Napier，1550—1617）在著作“Mirifici Logarithmorum canonis descriptio”（1614 年）中宣布发现了对数.

随后的 300 年间，人们认为“对数是简化乘除计算的方法.

对数的发明减轻了天文学家的负担."但最近计算机的发展改变了这种观点.

如果使用计算器的话,乘除计算是非常容易的事.首先,我们看一看对数计算的实例.

"本金1元,年利率6分,假定每半年成复利,那么500年以后本利总共多少?"

利用下面的公式求得本利总数 S

$$S=\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2\times 500}=1.03^{1\,000}.$$ [340]

实际计算这个公式时要进行1 000次相乘1.03,用计算器也不容易.这时就出现了对数计算.下面我们使用现在的最精确的27位对数表计算一下.

$$\log S=1\,000\times\log 1.03,$$

$$\log 1.03=0.012\,837\,224\,705\,172\,205\,17.$$

计算小数部分的真数得

$$\log 6.874\,240\,231\,169\,449=0.837\,224\,705\,172\,205\,17.$$

因为这里的指标为12,所以得13位数.即得

$$S=6\,874\,240\,231\,169\text{ 元 }44\text{ 钱 }9\text{ 厘}.$$

这是一个极端的例子,它的逆计算中需要开幂方根.为此,现在把4位、5位、7位对数表的计算交给计算器以后对数表变得更精确了,而且也出版了特别的对数表.我们深入该话题之前,先追溯对数的历史. [341]

2. 安岛直圆的对数

日本国著名和算家安岛直圆(1732—1798)研究了下面的问题.

从三角形 ABC 的顶点 A 向底边引直线,分成三个三角形.当在三个三角形中作内切圆使它们的直径都为 d 时,下面的公式成立

$$d=h\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{D}{H}}\right),$$

其中 D 为三角形 ABC 内切圆的直径，h 为三角形的高(图 25).

同理，当有 n 个内切圆的情形下，得

$$d=h\left(1-\sqrt[n]{1-\frac{D}{H}}\right).$$

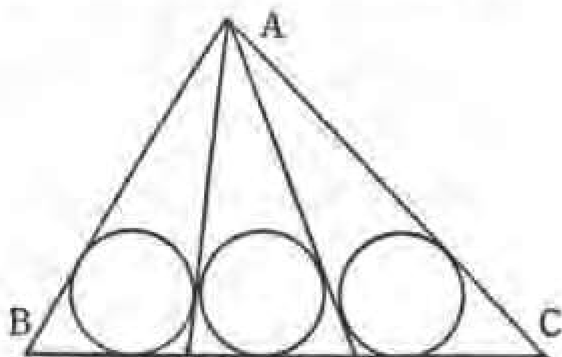


图 25

于是遇到了必须求 n 次方根的问题. 由于和算家注重数值计算，所以无论如何也得进行计算. 安岛直圆掌握了求 n 次方根的级数展开式，但由于它的收敛速度慢的缘故没有能够发挥作用. 因此，安岛直圆考虑了一种新的计算方法. 该计算方法就是在他的《不朽算法》(他过世后，他的弟子日下诚编辑整理，但由于某种原因未能正式出版)中给出的(如图 26).

图 26 安岛直圆的对数表.

安岛在该书的卷首说：

“或曰第二问，三斜内容等圆术，界斜数十，则开方乘数亦数十乘方. 得商数不容易，可谓无用之术矣.”

这里所说的是上面的开 n 次方的计算.

接着，安岛说：

“答曰，予有新考如左文.” [342]

并说明了某种对数的制作方法(“安岛直圆的对数表”书影，图 26).

书影中数字如下

真数	配数
7.943 282 347 242 8	0.9
6.309 573 444 801 9	0.8
5.011 872 336 272 7	0.7
3.981 071 705 535 0	0.6
… …	…
1.000 000 000 002 3	0.000 000 000 001

即，如 $\log 7.943\ 282\ 347\ 242\ 8=0.9$，它们的真数很复杂，而配数为正好的数. 安岛没有叫做对数，面叫做配数. 因此，必须先确定对数，然后计算对应的真数. 安岛直圆计算出了对应于 0.9、0.8、0.7、0.6、…、0.01、0.009、…、0.000 000 000 001 的 108 个真数，这样完成了《不朽算法》. 我出版《林鹤一博士和算研究集录》(1937 年)时收录了安岛的全部表(上卷第 679 页)，但没有能够澄清其中有疑点的 12 个数字的正确与否.

但后来看到了瑞士出版的“Deprez, Logarithmen”(1939 年)，它与安岛直圆的构想完全相同. 比较两者的结果表明安岛直圆的对数表没有任何错误.

安岛直圆的对数表只有 2 页，它的作用与全部 12 位对数表相同. Deprez 的对数表有 10 页，它能够发挥 14 位对数表 [343]
的威力. 就 14 位对数表来说它能够总括 1 000 页以上的纸张，

但以安岛直圆的方法处理的话只用它的$\frac{1}{100}$的纸张就足够了.

在西方 Deprez 以前 Andoyer(1921 年)、Duarte(1927 年)等人已经使用了这种方法,但都比安岛直圆要晚.安岛直圆在150 年以前就使用了这种方法.我给这种对数表起的名字为"安岛直圆对数表".

安岛直圆的对数是借助计算器的力量来计算的对数,其详细的说明请参阅《林鹤一博士和算研究集录》.安岛直圆的对数,正如开始时所论述,是在随 n 的增大而乘 n 次方或开 n 次方的情形下使用的方法.

3. Briggs 和 Bürgi

1614 年发表的纳皮尔对数的底数不是 10,这不便于计算.纳皮尔曾经想改良他的对数,但没有能够实现就去世了.他的学生 Henry Briggs(1556—1630)继承纳皮尔的遗志,实现了老师的梦想.据说是纳皮尔曾经安心地对他遗嘱过后事.他出版了"Arithmetica logarithmica"(1624 年).这是我们现在所使用的常用对数的开始.该书有从 1 到 2 万、从 9 万到 10 万的 14 位对数.下面的照片是在大英博物馆收藏的该书影(图 27).计算上有错误,现在的照片中也有 37,118,131 的错误.

下面我们看第一页.

	logarithmi					logarithmi			
1	0	0000.	00000,	00000	34	1	5314,	78917,	04226
2	0	3010,	29995,	66398	35	1	5440,	68044,	35028
3	0	4771,	21254,	71966	36	1	5563,	02500,	76729
⋮	⋮	…	…	…	⋮	⋮	…	…	…

连指标都给写出来了.

1628 年,荷兰的 Adrian Vlacq 发表了从 2 万到 9 万的数的对数计算,他利用了纳皮尔的方法,所以说十年以后对数表才被完善.



图 27 伦敦大英博物馆所藏世界上
最早的常用对数. [344]

下面看它的第一页

N.	log.				N.	log.			
1	0.	000	0000	000	67	1.	826	0748	027
2	0.	301	0299	957	68	1.	832	5089	127
3	0.	477	1212	547	69	1.	838	8490	907
4	0.	602	0599	913	70	1.	845	0980	400
⋮		…	…		⋮		…	…	

从科学的历史观看,他在对数的发现史上应该有一席之地.

与英国的纳皮尔和 Briggs 的事业没有任何关系的瑞士人 Bürgi(1552—1632)出版了"Aritmetische und Geometrische Progress,Prag"(1620 年). 照片上的第 2 和第 3 行有:"所有计算中使用的简便表". 没有使用对数这个术语,但这是一种逆计算的对数表. 虽然比纳皮尔的发明要晚了一些,但这是他独立发



图 28 Bürgi 对数表.

[345] 现的对数表.该书中用红色和黑色区别了数及其逆对数.书的下面有“Im Jahr 1620”的记载.

由于 Bürgi 是著名天文学家开普勒的学生,所以也有人说开普勒的工作刺激了逆对数表的发现.

另外,Bürgi 在 1592 年首次使用了小数点.下面摘录的是 Bürgi 的逆对数表的首页:

5 000	105 126 407
15 000	116 182 553
20 000	122 139 055
25 000	128 400 937
30 000	134 983 856
35 000	141 904 272
…	………

4. 对数的引入

下面借这个机会论述对数何时传到东方的问题.

对数和圆周率,是当时的最高学问.传教士认为在东洋传教中的首要任务是传教学术,所以他们把学术首先引进了中国.由于这个原因,对数被发现后过了三、四年以后就传播到了中国.最早的对数表就是穆尼阁的《比例对数表》(顺治 2 年,1645 年).穆尼阁是波兰人,他的原名是 Jean Nicolas Smogolenski (1611—1656).后来《比例对数表》被收录到《天学会通》中.对数这个术语也是从那时开始使用的.当时传进来对数表是 Briggs 和 Adrian Vlacq 的对数表. [346]

后来《数理精蕴》收录了这个对数表.清代康熙年间(1662—1722),数学家和天文学家们根据皇帝诏令编辑出版了《数理精蕴》.现在还不能确切地说《数理精蕴》什么时候传到了日本,但据说是在享保年间(1716—1735).因此,当时传到日本的是 10 位对数表.在中国和日本,从很早开始纳皮尔以"若往·纳白尔",Briggs 以"恩利格·巴里知斯"的名字为人们所知了.这是对数的第一次传入.

其后,到江户时代中期以后,宽政时期(1789—1800)随着荷兰的航海表传进来了 7 位对数表.这是第二次传入,到了明治以后,对数表第三次传入了日本.

5. 各种对数表

如前所述,随着计算器的发展,对数表的目的就转变成为了进行精密的计算.

1914 年是纳皮尔对数表被出版的 300 周年,为了纪念这一重要事件 1924 年在英国出版了:

Logarithmetica Britannica

Being a

Standard Table of Logarithms

To

Twenty Decimal Places

By

Alexander John Thompson

的第一册.从那年一开始直到 1937 年,陆续地出版了 8 册.从 1 万到 10 万的数中除去了 2 万到 3 万的数的对数为 20 位,因此,把它叫做"20 位对数表".由于汤姆森的去世缺少了从 2 万到 3 万之间的对数表.

N. 99900—100000

[347] 图 29　20 位对数表.

该对数表是非常宏大的书,用大型本的话约写满 1 000 页.

对数计算是把积转化为和来计算,所以,只要精密地计算素数的对数就可以了.基于这种考虑,如下表所表示的那样,只列了素数对数表,以便于使用.

在这种对数表中，从 1! 到 300! 的对数计算到 33 位，这是最精密的对数表.（Duarte 的著作）

N	$\log N$			
2	30102	99956	63981	19521
3	47712	12547	19662	43730
5	69897	00043	36018	80479
7	84509	80400	14256	83071
…	…	…	…	…

n	$\log n!$								
1!	0. 0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0
2!	0. 3010	2999	5663	9811	9521	3738	8947	2449	3
3!	0. 7781	5125	0383	6436	3250	8766	7979	7960	8
4!	1. 3802	1124	1711	6060	2293	6244	5874	2859	4
5!	2. 0791	8124	6047	6248	2772	2505	6927	0410	1
6!	2. 8573	3249	6431	2684	6023	1272	4906	8371	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	

根据这个表容易求出某数的对数，但反之不然.

例如，如果说明 $\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 79\cdots$，除以 3，把它的商除以 1.04，反复进行这个过程，那么就会如下面的因数分解. 此时，只能依靠计算器了.

$\pi = 3 \times (1.04) \times (1.006) \times (1.000\ 9) \times (1.000\ 015\ 217\ 225) \times \cdots$

故，

1.1，1.2，1.3，…，1.9，

1.01，1.02，1.03，…，1.09，

1.001，1.002，1.003，…，1.009， [348]

1.000 1，1.000 2，1.000 3，…，1.000 9，

…… …… ……

计算出上下数的对数就可以了. 如下表.

n	log n		
1.001	0.00043	40774	79319
1.002	0.00086	77215	31227
1.003	0.00130	09330	20418
1.004	0.00173	37128	09001
…	…	…	…

除此之外,人们作了各种各样的对数表,利用逆对数计算到 27 位数的对数表,将像 Lacroix(1926 年)对数表从 1 万到 10 万的数的对数以 5 位数为一个刻度写出来一样,这种对数表正确而且易于理解. 不同专业书用不同的对数表.

Log1.371 288 574 238 623 536 861 362 106 279 689 958 844 858 484 656 695 033 935 10

=0.371 288 574 238 623 536 861 362 106 279 689 958 844 858 484 656 695 033 935 099(最后的 3 位数不同);

Nat. logπ=1.144 729 885 849 400 174 143 427 351 353 058 711 647 294 812 916.

第 5 节　三角函数史话

图 30 是法国天文学者 Andoyer 于 1915 年出版的 14 位三角函数的真数表,现在也是最精密的函数表. 该表是 sine, cosine, tangent, cotangent 的 10 秒的表.

sin10 秒=0.000 048 481 368 092

sin20 秒=0.000 096 962 736 070

[349] sin30 秒=0.000 145 444 103 820

…　…　…　…

今天,这个表格一直被使用在制造齿轮车等方面. Andoyer 在没有其他人的帮助下计算出了这个表.

图 30 Andoyer 的 14 位三角函数的真数表.

1. 古代的函数表

塞翁(约公元 370 年)给我们传下来了欧几里得几何学,正在他"编辑"欧几里得《几何原本》的时候,希帕卡斯作出了一种"弦表".这可能是三角函数表的开端.

托勒密大约在公元 139 年左右进行天文观测的时候,他把圆周分为 360 度,作了"弦表".他在《天文学大成》中写进了该表,有如下形式

$$cd36^\circ=37\mu4'55'' \qquad cd72^\circ=70\mu32'3''$$
$$cd60^\circ=60\mu \qquad cd90^\circ=84\mu51'10''$$
$$cd120^\circ=103\mu55'23''$$

根据这个结果,他一直计算到 $cd1^\circ0'=1\mu2'50''$,进而能够 [350]
得出

$$\sin30'=\frac{1}{2}cd1^\circ0'=0\mu31'25''=0.008\,726\,8.$$

（详细情况请见薮内清《天文学大集》1949 年.）

希腊数学流传到阿拉伯以后，艾布·瓦法（940—约 998）为三角函数的计算作出了贡献.

在印度，400 年左右在 Surya Siddhanta 出现了正弦表. 随后，在阿耶波多（475—550）的著作中出现了正弦表及其逆函数表. 这个表在唐代的时候传播到中国并被收录到《唐开元占经》.

3°	45′	225	48°	45′	2 585
7	30	449	52	30	2 728
11	15	671	56	15	2 859
15	0	890	60	0	2 978
18	45	1 105	63	45	3 084
22	30	1 315	67	30	3 177
26	15	1 520	71	15	3 256
30	0	1 719	75	0	3 321
33	45	1 910	78	45	3 372
37	30	2 093	82	30	3 409
41	15	2 267	86	15	3 431
45	0	2 431	90	0	3 438

该表是对 3°45′的倍数取度数的表. 虽然不清楚为什么对于 90°的正弦确定为 3 438，但阿耶波多所采用的圆周率的值为 3.141 6，所以使用下面的近似值才能够成立，

$$\frac{180\times 60}{3.141\ 6}=3\ 43\dot{8}.$$

所以，我想这可能是其主要原因.

把该数转换为小数时它的误差小于 0.000 2，李俨在《中国古代数学史料》（1954 年）中明确说明了这一点.

2. 文艺复兴

阿拉伯的三角方法传到欧洲，正是迎接文艺复兴的时候，数学家米勒（1436—1476）为三角函数表的计算作出了重要贡献，

他是把圆的半径等分为 60 万份来计算的. [351]

随后,人们进行了计算,出版了三角函数表:

1533 年,阿皮安斯出版了《正弦表》.

1551 年,列铁卡斯出版了以 10 为进位单位的 6 位数的《三角函数表》.

1579 年,韦达扩展列铁卡斯的表,出版了以 1 为进位单位的函数表.

1554 年,列因霍德又出版了以 1 为进位单位的表.

1596 年,Opus Palatinum 出版. 其中,有 10 秒为单位的 10 位数的三角函数表. 该书是由列铁卡斯编辑,瓦廉亭・欧托出版的.

3. 在中国的传播

与对数表相同,传教士为了传教把三角函数表也很早带到了中国. 最早进来的是罗雅谷、徐光启的《测量全义》十卷(崇祯 4 年,1631 年). 罗雅谷是意大利人,他原名是 Jacques Rho. 天启 4 年(1624 年)来到了中国. 徐光启是上海人.

《测量全义》的三角函数表被命名为"割圆八线小表",它的写法如下:

度	初				一				二				⋮	八九			
分	初	十五	三〇	四五		十五	三〇	四五		十五	三〇	四五	⋮		十五	三〇	四五
正弦		四三	八七	一三〇	一七四	二一八	二六一	三〇五	三四九	三九二	四三六	四八〇	⋮	九九九八	九九九九	九九九九	九九九九
切線		四三	八七	一三〇	一七四	二一八	二六二	三〇五	三四九	三九三	四三七	四八〇	⋮	五七二八九九	七六三九〇〇	一一四五八八六	二二九一八二六
割線		一〇〇〇〇	一〇〇〇〇	一〇〇〇一	一〇〇〇一	一〇〇〇二	一〇〇〇三	一〇〇〇五	一〇〇〇六	一〇〇〇七	一〇〇〇九	一〇〇一二	⋮	五七二九八六	七六三九六五	一一四五九三〇	二二九一八三八

它是以 15 分为进制单位的正弦、切线、割线的表. 数没有小数点,只列了数字. 在东洋从此开始使用三角函数、度、分等术语. 把 tangent 和 secant 分别叫做切线和割线,但没有过多久发生了如下变化.

AC=正弦， AB=余弦， GF=正切，
OG=正割， OF=余割， FD=余切，
EC=正矢， DB=余矢.

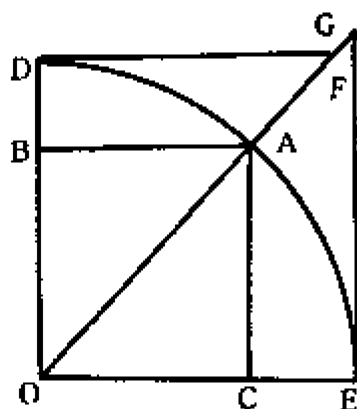


图 31

[352] 当时,即使在西方也不是用比值来表示三角函数,而是以圆的半径为单位取的线段的长度来表示三角函数的.

除 6 个三角函数之外，由于把 $1-\sin\theta$ 和 $1-\cos\theta$ 分别叫做正矢和余矢，所以把三角函数表叫做“割圆八线表”或“八线表”.

《测量全义》中的“割圆八线小表”,只列入了 6 个函数中的 3 个. 在同年出版的《崇祯历书》①的“割圆八线表”中列举了以正弦线、正切线、正割线、余弦线、余切线、余割线为顺序的、以 1 分为进的 5 位数的三角函数表.

在后来出版的《数理精蕴》中已经出现了以 1 秒为进的小数为 5 位的表(如图 32).

① 《测量全义》是《崇祯历书》的一种.

图 32 引自《数理精蕴》. [353]

4. 在日本的传播

三角函数表什么时候传到了日本,这是一个非常有趣的问题.近藤守重的《好书故事》是可靠的文献,在"享保 12 年(1727 年)条"中说:

"写了割圆八线表.守重云,割圆八线之表一部一套二本,享保二年初渡来.故,始为十二年.彦次郎著作中有八线表谚解."

近藤守重曾经是幕府的书物奉行官.引文中的彦次郎就是建部贤弘.由此可见,享保 12 年三角函数表已经传到了日本,建部贤弘也见过.

5. 日本的三角函数表

然而,在享保 7 年(1722 年)以前建部贤弘写的著作《弧率》

中，详细介绍了三角函数表的制作法，并在书末附了“半弦表”和“半背表”．建部贤弘为了制作三角函数表，计算了圆周率，在拙著《圆周率的历史》(1955 年)中有详细介绍．

“弧率”的表如下：

限数	初	一	二	三	四	五	六	七	…
半背	空	〇〇八七	〇一七四	〇二六一	〇三四九	〇四三六	〇五二三	〇六一〇	…
		二六六四	五三二九	七九九三	〇六五八	三三二三	五九八七	八六五二	…
		六二六	二五二	八七八	五〇四	一三〇	七五六	三八二	…
半弦		〇〇八七	〇一七四	〇二六一	〇三四八	〇四三五	〇五二二	〇六〇九	…
		二六二〇	四九七四	六七九七	七八二三	七七八七	六四二三	三四六七	…
		三二二	八三五	八一二	六八七	一三七	一六三	一七〇	…

表中“限数”指的是角度．在这以前从中国传入的天文学著作中已经知道了将全周分成 360 等分的方法．一、二、三、……相当于 1°，2°，3°，…….

[354] “半背”是角所对的弧长的$\frac{1}{2}$．“半弦”是弧所对的弦的$\frac{1}{2}$，也就是它等于正弦的$\frac{1}{2}$，上面表的意思为

$$\frac{1}{2}\sin 1^\circ=0.008\ 726\ 203\ 22$$

$$\frac{1}{2}\sin 2^\circ=0.017\ 449\ 748\ 35$$

………………………………………………

比较建部函数表和安多艾亚的 14 位三角函数表的结果，没有发现计算上的错误，很显然，这是建部贤弘独立计算出来的结果. 因为建部在详细地论述计算方法的同时也给出了"半背"值.

应该高度评价建部的三角函数表. 1622 年初，从日本出版数学著作以来，在 100 年之内只取得了这些成果. 建部也完成了相当于三角函数的加法和减法的理论和圆周率的计算理论.

建部的表是 1 度进位的，由于其后不久看到了传播进来的《割圆八线表》，所以没有人来继承建部未能完成的工作.

	初	一〇	二〇	三〇	四〇	五〇	六〇	七〇	八〇	九〇	一度〇〇	一〇	二〇	三〇	四〇	五〇	六〇	七〇	八〇	九〇	二度〇〇	一〇	…
矢	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	…
半弦	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	…

然而，日本还出现过另一种特别的三角函数表. 将全周等分 360 分将 1 分作为 1 度，又把 1 度 100 等分将 1 份作 1 分，再把 1 分 100 等分将 1 份作 1 秒的 100 进位的三角函数表. 把它叫做"割圆十分表". 最初计算该表的人是松永良弼(? —1744)，是年为元文元年(1736 年).

上表中，所谓矢是指圆弧的中点与弦的中点的连线. 该表曾被利用在天文和历法计算中. 松永的表是 10 进位的，后来文政

[355]

时期(1803年)[①]茶室实寿重新计算了《新编百分表》并把它改为1进位的表.

与对数表相同,在江户时期中叶,随着荷兰的航海表的引进,再次在测量技术和航海技术中使用了三角函数表.图33中是引自真田流的《炮术书》(天保10年,1839年)照片.详细情况,请见平山谛《圆周率的历史》和《林鹤一博士和算研究集录》(1937年)上卷.

图33 《炮术书》中的三角函数表.

$$\sin 1^\circ = 0.017\,452\,406\,437\,283\,512\,819\,418\,978\,516$$

$$\sin 1' = 0.000\,290\,888\,204\,563\,424\,596\,374\,297\,416$$

① 文政为1819年~1843年,非1803年,原文有误.

sin 1″=0.000 004 848 136 811 076 367 820 079 091

cos 1°=0.999 347 695 156 391 239 157 011 558 814

cos 1′=0.999 999 957 692 025 327 951 262 487 173

cos 1″=0.999 999 999 988 247 784 730 174 076 218 [356]

第6节 虫 食[①] 算

1. 虫食算

日本很早以前就有了虫食算.这是一个古老的名称.因为日本古代的纸易于被虫食,于是很自然地出现了这个名称.

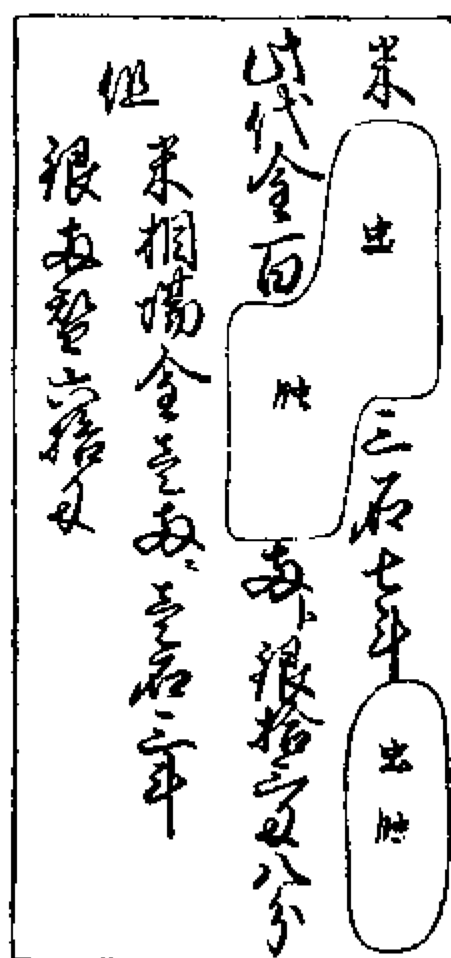


图 34

和算书中经常见到一些利用考证的实例.从享有很高评价的藤田贞资的《精要算法》(天明元年,1781年刊行)中举一个例题.(如图 34)如下:

"有米□□3 石 7 斗□升□合.值金 1□□两和银 13 匁 8 分.但,米市价为金 1 两米 1 石 3 斗,金 1 匁兑换银 60 匁."

当时金和银各自单独流通,它们之间也有过交换价格."兑换银 60 匁",是 1 匁金的价格等于 60 匁银的价格.银 13 匁 8 分转换成金价后

13 匁 8 分÷60 匁=0.23 两

于是该问题被转化为

1.3 石×1□□.23=□□3.7□□石

解该问题后得,代金为金 195

① "虫食"即虫蛀.

两和银 13 匁 8 分，米 253 石 7 斗 9 升 9 合. 这计算是属于解不定方程问题，暂时不准备讨论.

[357] 我们还不清楚虫食算的起源，但很早以前，久留岛义太(? —1757)的《算梯》中有这类问题. 它首次被印刷出版是在中根彦循的《竿头算法》(1738 年)的第一问中. 该问题被归结为解方程

$$\square\square 23.\square\square \div 37 = \square\square.23.$$

2. 虫食算的趣味性

虫食算引起人们兴趣的原因有：(i)肯定能够解答的问题.(ii)问题的解有一个或两个，即使有若干个也不会失去它的意义.(iii)当然，一目了然的问题没有趣味性.

看以下乘法运算. 这是 3 位数和 2 位数相乘的运算，但只给一个 8 这个数字. 表面上只有这个条件决定全部数字是不可能. 但仔细分析后能够看出其中的条理，如同解线结那样地得到解答.

```
    □□□   ……(1 段)        1□□   ……(1 段)
 ×   8□   ……(2 段)     ×   8□   ……(2 段)
 ───────                ───────
   □□□□   ……(3 段)       □□□□   ……(3 段)
   □□□    ……(4 段)       8□□    ……(4 段)
 ───────                ───────
   □□□□   ……(5 段)       □□□□   ……(5 段)
```

```
    1□□   ……(1 段)        1 1□   ……(1 段)        1 1 2
 ×   8□   ……(2 段)     ×   8 9   ……(2 段)     ×   8 9
 ───────                ───────                ─────────
   1□□□   ……(3 段)       1□□□   ……(3 段)      1 0 0 8
   8□□    ……(4 段)       8□□    ……(4 段)      8 9 6
 ───────                ───────                ─────────
   9□□□   ……(5 段)       9□□□   ……(5 段)      9 9 6 8
```

(i) 1 段和 4 段原来是 3 位数，1 段的 8 倍为 4 段，首位数字是 1 段的 1，所以，4 段的首位数字应该是 8 或 9，因为 5 段是 4 位数，所以，4 段的首位数字应为 8.

(ii) 为了使 3，4，5 段的首位数字适合于计算，必须有 3 段的首位数字为 1，5 段的首位数字为 9.

(iii) 因为1段的8倍等于4段，所以，1段的第2位数字应该是0或1. 若是0，则3段的计算不能进行. 因此，应为1. 再比较2段和3段，就会知道2段的末位数为9.

(iv) 只要能够追究到这里，后面就容易了. 如果1段的末位数字是3以上的话，4段的第2位数被往上提，所以，必须是1 [358]
或2. 若是1，则3段的第3位数被往上提，所以不是1. 所以，1段的末位数应为2.

这是非常漂亮的实例，但是作这样的问题并不容易.

再举2,3个加减乘除的例子.

```
   1 □ 9 2          □ □ 7 □ □          □ 3 9 □ 1
   2 9 □ 1          □ 1 0 □ 9        − 5 □ □ 2 □
   9 7 1 □            □ 0 0 6          ---------
 + □ 2 1 7       +        □ 9            6 4 5 8
 ---------       -----------
 1 6 8 7 4       2 □ □ □ □ 1

  □ 8 4 5 6 2          8 2 3              3 □ □ □
−   8 □ 1 □ 3       ×    1 □           ×      9 □
 -----------        ---------          -----------
  7 □ 7 □ 7 □        □ □ □ 5             2 □ □ □ 1
                   8 2 3               3 0 □ 1 7
                   ---------           -----------
                   □ □ □ □ 5           3 3 □ □ □ 1

      9 7 □            □ 5 2 □                □ 3
 ×      □ 8        ×       3 □           ---------
 -----------       -----------          □ □ ) 9 1 9
    □ □ □ 0          □ 0 □ 8                □ □
  9 □ □            4 □ □ 2                -------
 -----------       -----------               □ □ 9
  1 7 5 □ 0        4 □ 7 □ 8                 □ □ 9
                                             -------

        □ □                3 □                □ 7 □
     ---------           ---------          -----------
 2 8 ) 1 □ □ 4      □ □ ) 2 □ □ 9      □ □ ) 1 7 4 2 4
       □ □                2 3 □              □ □
     ---------           ---------          -----------
         □ □ 4              5 □ 9              □ 5 2
         □ □ 4              5 □ 9              □ □ □
     ---------           ---------          -----------
                                                 □ □ 4
                                                 □ □ 4
                                            -----------
```

3. 虫食算的代表作

日本的虫食算并不是很多,但进入了本世纪后,在西方数学杂志上经常见到虫食算问题.如前面举的 2 例,日本的虫食算大多是用解不定方程的特别方法.西方的虫食算大多是计算.下面
[359] 举西方的代表作.

```
              □4□□                            □5□
       ┌─────────                       ┌────────────
 □□□ ) □□□□□□4                   □□□□ ) □55□□5□
        □□□                              □□5□□
       ──────                           ──────────
        □□4□                              □□□□□
        □□□□                              □□□□□
       ───────                          ──────────
         □□□□                               □□□□
          □4□                               □□□□
         ──────                            ────────
          □□□□
          □□□□
         ──────
```

第 1 问是只给出 4 个 4,叫做 4—4 虫食算.它有以下 4 个解:

1 337 174÷943=1 418,1 343 784÷949=1 416,

1 200 474÷846=1 419,1 202 464÷848=1 418.

第 2 问是 5—5 虫食算.

```
                        □□7□□
            ┌──────────────────
 □□□□7□ ) □□7□□□□□□□
            □□□□□□□
           ──────────
            □□□□□7□
            □□□□□□□
           ──────────
              □7□□□□
              □7□□□□
             ──────────
              □□□□□□□
              □□□□7□□
             ──────────
                □□□□□□
                □□□□□□
               ────────
```

```
            □7□□□
     □□□)□□□□□□□□
         □□□□
           □□□
           □□□
           □□□□
            □□□
             □□□□
             □□□□
```

第1问是7——7虫食算，但第2问中只有一个7，所以叫做孤独的7.

```
                  □□□7□□□
     □□□□3□)□9□□□□□□□□□□
             □□□□□□
             □□□□□□□
              □4□□□□
              □□□6□□□
              □□□□□□1
                □□□□□□
                □□□2□□
                 □□□□□□
                 □□□□□□
                  5□□□□□
                  □□□□□□
                   □□8□□□
                   □□□□□□
```

这是包含从1到9的数字各有一个，结果为

696 093 216 694÷118 039=5 897 146，

逐个地解开到这里是非常不容易的事.

[360]

```
           □□□□.□□□□
      ┌─────────────
□□□ ) □□□□□□□
      □□□
      ─────────
        □□□
        □□□
        ─────────
          □□□
          □□□
          ─────────
            □□ □
            □□ □
            ─────────
                □□□□
                □□□□
                ─────────
```

```
          .□̇□□□□□□□̇
     ┌─────────────
□□ ) □
     □ □□
     ─────────
       □□□
       □□□
       ─────────
         □□□
         □□□
         ─────────
           □□□
           □□□
           ─────────
              □□□
              □□□
              ─────────
                □□
                □□
                ─────
                 □
```

这第 1 问是 A. Corrigan 的作品，要求在只知道与一个小数点联系的情况下，要去发现全部数字. 第 2 问的答案为循环小数.

第 1 问，631 938÷625＝1 011.100 8；

第 2 问，7÷73＝.$\dot{0}$95 890 4$\dot{1}$.

很显然这些都是具有美感的问题，这是虫食算精彩之处. 上面举的例子都是杰作中的杰作，它的解相当麻烦. 最近，在一些

入学考试题中也出现虫食算问题.

$$\begin{array}{r} \mathrm{SEND} \\ +\mathrm{MORE} \\ \hline \mathrm{MONEY} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9567 \\ +1085 \\ \hline 10652 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{RSR} \\ \mathrm{PR}\overline{)\mathrm{MTVVR}} \\ \mathrm{MVR} \\ \hline \mathrm{KKV} \\ \mathrm{KMD} \\ \hline \mathrm{MVR} \\ \mathrm{MVR} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 565 \\ 35\overline{)19775} \\ 175 \\ \hline 227 \\ 210 \\ \hline 175 \\ 175 \\ \hline \end{array}$$

这是在相同字母的地方,有相同数字的问题.把这种问题叫做遮盖脸面算. [361]

以上是根据高木茂男的《虫食算史话》(1935 年,誊写版)编写的.

英语中把虫食算用 Digital puzzle, Rastoration problem, Missing figure puzzle, Dotty problem, Digit problem 等词来表示,在德语中用 Vergilbte Manuskripte 来表示.

……………………………………

$$\begin{array}{r} ?????\\ -\ \ ????\\ \hline 12345 \end{array}$$

在? 处填写从 1～9 的数字问题是在 1941 年《新中国报》(中国的报纸)上的猜谜题中出现的,安部元章氏的著作中给出了如下 6 个答案:

$$\begin{array}{r} 15987 \\ -\ \ 3642 \\ \hline 12345 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16923 \\ -\ \ 4578 \\ \hline 12345 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16932 \\ -\ \ 4587 \\ \hline 12345 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17634 \\ -\ \ 5289 \\ \hline 12345 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17643 \\ -\ \ 5298 \\ \hline 12345 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18579 \\ -\ \ 6234 \\ \hline 12345 \end{array}$$

可是，该问题中的减数改变为 5 位数，在数扩大到 0～9 以后将会发生什么变化呢？浦田繁松氏给出了 56 个解：

27 948—15 603，28 704—16 359，28 740—16 395，29 685—17 340，
38 019—25 674，38 064—25 719，38 091—25 746，38 109 25 764，
39 801—27 456，39 810—27 465，39 846—27 501，49 125—36 780，
49 152—36 807，49 170 36 825，49 215—36 870，50 169—37 824，
50 214—37 869，50 241—37 896，50 286—37 941，50 619—38 274，
51 024—38 679，51 042—38 697，51 069—38 724，51 807—39 462，
52 086 39 741，60 258—47 913，60 537—48 192，61 275—48 930，
61 302—48 957，61 320—48 975，61 725—49 380，62 058—49 713，
62 103—49 758，62 130—49 785，62 175—49 830，63 129—50 784，
63 174 50 829，63 192—50 847，63 219—50 874，72 498—60 153，
72 534—60 189，72 543—60 198，74 235—61 890，74 253—61 908，
74 280—61 935，74 325—61 980，82 659—70 314，83 604—71 259，
83 640—71 295，84 396—72 051，93 765—81 420，94 701—82 356，
[362] 94 710—82 365，95 412—83 067，95 421—83 076，96 357—84 012.

第7章 计算Ⅱ

第1节 素　　数

除1和自身以外没有其他约数的素数登场数学世界已经有2 000多年的历史了，它有许多不可思议的性质，至今没有一个人能够完全解决，它越来越吸引着人们的兴趣.

1. 埃拉托塞尼的筛子

埃拉托塞尼(约公元前275年～公元前195年)的筛子是指，排列自然数1,2,3,4,…，依次消去2的倍数、3的倍数、5的倍数、7的倍数、……的过程. 现在，除此之外，还没有其他判断某数是否为素数的方法.

实际上，如确定349是否素数时，开349的平方后知道

$$18<\sqrt{349}<19,$$

这里用小于18的素数2,3,5,7,11,13,17除349，由于349不能被这些数整除，所以349是素数.

但是，用这个方法解决实际问题时非常繁琐，所以人们从古代开始作了素数表或素因数分解表. 1914年，美国人莱默(Lehmer)得到佳涅吉财团的援助出版了现在的最大素数表. 把从1到10 006 721(只有一千万!)的664 580个素数写在巨著中，每页上有5 000个素数.(莱默一直到在战争中死亡为止，检讨了该素数表里有 [363]

没有错误. 把存在的错误在美国的数学杂志上发表过两三次.）

这里首先要解决的问题是素数是有限的还是无限的问题. 据说古希腊的欧几里得证明了素数的无限性，实际上也能够严格证明这个命题.

自古以来人们一直探讨着什么形式的数为素数的问题.

首先，有人主张 2^p-1（p 是素数）形式的数是素数.

$$2^2-1=3, 2^3-1=7, \quad 2^5-1=31, \quad 2^7-1=127.$$

上面的数的确是素数，可是下面的数并不是素数，

$$2^{11}-1=23\times 89, \quad 2^{23}-1=47\times 178\ 481,$$

所以，上述命题不成立.

法国著名数学家费马提出如下形式的数为素数

$$2^{2^k}+1. \tag{1}$$

当 $k=1,2,3,4$ 时，有

$$2^2+1=5, 2^4+1=17,$$

$$2^8+1=257, \quad 2^{16}+1=65\ 537.$$

这些数为素数，但是当 $k=5,6$ 时，命题不成立，

$$2^{32}+1=4\ 294\ 967=641\times 6\ 700\ 417,$$

$$2^{64}+1=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 617$$

$$=274\ 177\times 67\ 280\ 421\ 310\ 721.$$

欧拉于 1732 年指出了当 $k=5$ 的情形以后，很多数学家研究了(1)形式的数是否为素数的问题，到今天为止得到的结果如
[364] 下（M. Kraitchik, La mathematique des jeux, ou recreations mathematiques, 1930, p. 98）：

当 $k=7,8$ 时，能够预料到和数，但还不能发现因数. 已经判定的因数为

$k=9$：$37\cdot 2^{16}+1$；

$k=11$：$39\cdot 2^{13}+1$ 及 $119\cdot 2^{13}+1$；

$k=12$：$7\cdot 2^{14}+1$ $397\cdot 2^{16}+1$ $973\cdot 2^{12}+1$；

$k=15$：$579\cdot 2^{21}+1$；

$k=18$：$13\cdot 2^{20}+1$；

$k=23$：$5\cdot 2^{25}+1$；

$k=36$：$5\cdot 2^{39}+1$；

$k=38$：$3\cdot 2^{41}+1$；

$k=73$：$5\cdot 2^{75}+1$.

还举出了 2^n+1 形式的数的素因数分解：

$2^{28}+1=17\times 15\ 790\ 321$；

$2^{40}+1=257\times 4\ 278\ 255\ 361$；

$2^{44}+1=17\times 353\times 2\ 931\ 542\ 417$；

$2^{48}+1=193\times 65\ 537\times 22\ 253\ 377$；

$2^{52}+1=17\times 858\ 001\times 308\ 761\ 441$；

$2^{58}+1=5\times 107\ 367\ 629\times 536\ 903\ 681$；

$2^{60}+1=17\times 241\times 61\ 681\times 4\ 562\ 284\ 561$.

欧拉指出

$$x^2+x+41$$

当 $x=0,1,2,3,4,5,39$ 时，等于

$$41,43,47,53,61,71,1\ 601,$$

这些都是素数. 又当 $x=0,1,2,3,4,5,14,19,23,29$ 时，x^2+x+17 也为素数. 把这两个公式叫做**欧拉公式**. [365]

2. 孪生素数

素数中引人注目的是孪生素数. 所谓孪生素数是如下形式的两个数之差为 2 的素数：

$$\begin{cases}5\\7\end{cases}\quad\begin{cases}11\\13\end{cases}\quad\begin{cases}17\\19\end{cases}\quad\begin{cases}29\\31\end{cases}\quad\begin{cases}41\\43\end{cases}\quad\begin{cases}59\\61\end{cases}\quad\begin{cases}71\\73\end{cases}$$

现在还没有断定是否有无限组个孪生素数的问题. 下面从接近 10 万的数字中选出几组孪生素数.

$$\begin{cases}99\ 989\\99\ 991\end{cases}\quad\begin{cases}99\ 527\\99\ 529\end{cases}\quad\begin{cases}99\ 347\\99\ 349\end{cases}\quad\begin{cases}99\ 257\\99\ 259\end{cases}$$

从列玛素数表中可以选出1 000万以上的孪生素数.

{10 006 427, 10 006 429}	{10 006 349, 10 006 351}	{10 006 109, 10 006 111}
{10 005 881, 10 005 883}	{10 005 629, 10 005 631}	{10 005 509, 10 005 511}

Glaisher调查了数字的大小和双子素数多少的关系.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	36	26	21	21	23	17	19	13	15	15
1	16	14	11	15	11	12	13	18	12	15
2	15	15	16	14	6	12	11	15	12	9
3	11	13	19	13	16	11	9	12	11	9
4	8	12	12	11	11	7	12	11	13	17
5	9	14	8	11	8	11	14	9	11	11
6	10	6	8	10	9	14	6	10	9	12
7	16	10	11	6	10	9	11	9	9	11
8	13	12	13	8	12	11	8	14	10	8
9	10	10	12	12	13	8	7	15	13	8

[366] 该表显示,孪生素数组在0到1 000之间有36组,1 000到2 000之间有26组,2 000到3 000之间有21组,……,10 000到11 000之间有16组,……,90 000到91 000之间有10组,……,99 000到100 000之间有8组.

从1到10万之间共有1 225组孪生素数.

Glaisher进一步调查了下面的孪生素数.

100万与110万之间:725组;

200万与210万之间:644组;

600万与610万之间:545组;

700万与710万之间:525组;

800万与810万之间:518组.

3. 素数的个数

可以把素数分成$4n+1$和$4n-1$两种形式.下面的数据是

将分成两种形式后做的素数个数的调查表.

	4n+1 的素数	4n−1 的素数	合计
1—1 000	81	87	168
1—2 000	148	155	303
1—5 000	331	338	669
1—10 000	611	618	1 229
1—20 000	1 131	1 133	2 264
1—30 000	1 618	1 627	3 245
1—40 000	2 096	2 107	4 205
1—50 000	2 566	2 567	5 133
1—100 000	4 784	4 808	9 592
10^6—$11\cdot10^5$	3 642	3 574	7 216
$2\cdot10^6$—$21\cdot10^5$	3 463	3 411	6 874
$3\cdot10^6$—$31\cdot10^5$	3 368	3 308	6 676
$6\cdot10^6$—$61\cdot10^4$	3 193	3 187	6 397
$7\cdot10^5$—$71\cdot10^3$	3 182	3 187	6 369
$8\cdot10^6$—$81\cdot10^3$	3 126	3 124	6 250

[367]

久留岛——有马定理

关于决定素数的个数,有著名的久留岛——有马定理.

“从 2 到素数 N 之间(包括 2 和素数 N)的素数的个数为,取从 2 开始的素数

$$2=p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_r<\sqrt{N},$$

并从下式得到

$$N-\sum\left\{\left[\frac{N}{p}\right]-1\right\}+\sum\left[\frac{N}{pp}\right]-\sum\left[\frac{N}{ppp}\right]+-\cdots-1. \quad (1)”$$

$p, pp, ppp, \cdots$是只用这些素数的个数作的所有组合的乘积.[ ]是它们之间的各整数部分.

由于 $\sqrt{101}=10.\cdots$,所以,取从 2 开始的素数 2,3,5,7.

因此，

$$-\sum\left\{\left[\frac{N}{p}\right]-1\right\}=-\left\{\left[\frac{101}{2}\right]-1+\left[\frac{101}{3}\right]-1+\left[\frac{101}{5}\right]-1+\left[\frac{101}{7}\right]-1\right\}$$

$$=-(49+32+19+13)=-113,$$

$$\sum\left[\frac{N}{pp}\right]=\left[\frac{101}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{101}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{101}{2\cdot 7}\right]+\left[\frac{101}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{101}{3\cdot 7}\right]+\left[\frac{101}{5\cdot 7}\right]$$

$$=16+10+7+6+4+2=45,$$

$$-\sum\left[\frac{N}{ppp}\right]=-\left\{\left[\frac{101}{2\cdot 3\cdot 5}\right]+\left[\frac{101}{2\cdot 3\cdot 7}\right]+\left[\frac{101}{2\cdot 5\cdot 7}\right]+\left[\frac{101}{3\cdot 5\cdot 7}\right]\right\}$$

$$=-(3+2+1+0)=-6,$$

$$\sum\left[\frac{N}{pppp}\right]=\left[\frac{101}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right]=0,$$

[368] 故

$$(1)式=101-113+45-6+0-1=26.$$

这个定理是久留米藩主、数学家有马赖徸(1714—1783)在宝历 13 年(1763 年)写成的《互对演段》的手抄本中论述的，后来是在明和 6 年(1769 年)出版的《拾玑算法》中公开的. 但是，这个定理在有马的老师久留岛义太(? —1757)的草稿中已经有了，所以被称之为久留岛有马——定理.

久留岛、有马以后，西方勒让德尔(Legendre)于 1798 年阐述了该定理.

4. 梅森数

1644 年出版的梅森(Mersenne)著作的序文中论述了当 2^n-1 为素数时 n 要取的值

$n=1,2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257.$

我们还不知道梅森根据什么提出了这个定理，但至今为止已经判定了当

$n=2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,127$

时 2^n-1 为素数. 其中的 89 和 107 在梅森的表中没有，61 代替了 67. 这样，当 $n=127$ 时，已经判定了的最大素数为(Lucas,1877 年)

$2^{127}-1=170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$,

但还没有明确其因数.

至今已经确定了的 2^n-1 的因数分解如下表. 其详细论述在前面介绍的 Kraitchik 著作的第 100 页. 由此看出，1640 年费马解决了当 $n=11$ 时的因数分解，最后，1924 年 Poulet 解决了当 $n=73$ 时的因数分解问题. [369]

n	2^n-1
11	23×89
15	7×31×151
23	47×178 481
29	233×1 103×2 089
37	223×616 318 177
41	13 367×164 511 353
43	431×9 719×2 099 863
47	2 351×4 513×13 264 529
53	6 361×69 431×20 394 401
59	179 951×3 203 431 780 337
67	19 370 721×761 838 257 287
71	228 479×48 544 121×212 885 833
73	439×2 298 041×9 361 973 132 609
151	因数 18 121
181	因数 43 441
211	因数 15 193
223	因数 18 287
233	因数 1 399

5. 素数的连乘数及其与 1 的和与差

这是自很早以来引起人们兴趣的计算问题. 下面列举所收集到的计算结果.

和为：

$P_2+1=2+1=3$,

$P_3+1=2\cdot3+1=7$,

$P_5+1=2\cdot3\cdot5+1=31$,

$P_7+1=2\cdot3\cdot5\cdot7+1=211$,

$P_{11}+1=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11+1=2\ 311$,

$P_{13}+1=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13+1=59\times509$,

$P_{17}+1=19\times97\times277$,

$P_{19}+1=347\times27\ 953$,

$P_{23}+1=317\times703\ 763$,

$P_{29}+1=331\times571\times34\ 231$,

$P_{41}+1$ 被 61 整除；

[370] 差为：

$P_2-1=2-1=1$,

$P_3-1=2\cdot3-1=5$,

$P_5-1=2\cdot3\cdot5-1=29$,

$P_7-1=2\cdot3\cdot5\cdot7-1=11\times19$,

$P_{11}-1=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11-1=2\ 309$,

$P_{13}-1=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13-1=30\ 029$,

$P_{17}-1=61\times8\ 369$,

$P_{19}-1=53\times197\times929$,

$P_{23}-1=37\times131\times46\ 027$,

$P_{29}-1=79\times81\ 894\ 851$,

$P_{37}-1=229\times541\times1\ 549\times38\ 669$.

6. 关于素数的猜想

由于人们对素数着迷，所以，自古以来提出了各种各样的猜想.

(i) 哥德巴赫(Goldbach)猜想

哥德巴赫(Goldbach，1690—1764)提出了下面的猜想：

"所有的偶数都可以写成两个素数之和."

用如下形式表示

$$10=3+7,\quad 12=5+7,\quad 14=3+11.$$

关于这个猜想至今还没有出现严格的证明①.据说，已经进行到5 000以内的实际实验.

安部元章氏在1943年指出：

和为10的2个素数有一组

$$3+7$$

和为100的2个数有6组

3+97=100，　11+89=100，　17+83=100，
29+71=100，　41+59=100，　47+53=100.

和为1 000的2个素数有28组

3+997，　17+983，　23+977，　29+971，　47+953，
53+947，　59+941，　71+929，　89+911，　113+887，
137+863，　173+827，　179+821，　191+809，　227+773， [371]
239+761，　257+743，　281+719，　317+683，　347+653，
353+647，　359+641，　383+617，　401+599，　431+569，
443+557，　479+521，　491+509.

如果是3个素数之和，那么，2+3+5=10，2+19+79=100，2+31+67=100，2+37+61=100，4个以上素数的和会有

---

① 这个问题变成2个较易操作的命题.其一为：正整数 N 可由 n 个素数之积与 m 个素数之积的和构成，记为 (n,m).中国数学家陈景润证得(1,2)，1976年发表证明以来，再无进展.

更多.

浦田繁松氏在 1942 年发现了从 2 到 23 的素数之和为 100，即

$$2+3+5+7+11+13+17+19+23=100.$$

(ii) 拉格朗日猜想

1775 年在专业杂志上发表的拉格朗日猜想为：

“$4n-1$ 形式的素数可以表示为 $4n+1$ 形式的素数和 $4n+1$ 形式的别的素数的 2 倍的和.”

例如，

$$23=13+2\times5,\quad 43=17+2\times13.$$

(iii) 费马猜想

法国数论大师费马提出了很多猜想，其中多数被证明为真的，这是对数学的巨大贡献.

小定理为：

当 $m=2^n$ 时，2^m+1 为素数.”

如前所述，1732 年欧拉已经否定了当 $n=5$ 时的情形，即

$$2^m+1=4\ 294\ 967\ 297=641\times6\ 700\ 417$$

[372] 费马大定理，也叫做费马最后定理，费马在 1670 年的一本书的空白处写到：“这里写不下这个定理的证明”.

“$x,y,z,n,(n>2)$ 为正整数时，不存在满足下面形式的数 $x^n+y^n=z^n$.”

这个猜想已有 300 多年的历史了，但还没有得到证明. 听说最近有人已经证明了，但详细情况还不清楚①.

关于素数的中国问题

“2^n-2，当 n 为素数时，被 n 整除，当 n 为非素数时，不能被 n 整除.”

---

① 1995 年 5 月，42 岁的英国人怀尔斯(Andrew Wiles，1953)对费马大定理发表了证明，并得到确认.

Ball 在“Mathematical recreation and essays”(1905 年)中说这是从中国古代流传下来的定理，但令人遗憾的是我还没有确切地知道他是根据了什么典籍. 关于这个定理，在《林鹤一博士算研究集录》(1937 年)下卷第 653 页有论述.

7. 业余爱好者

有连续素数之和为平方数的数：

$17+19=6^2$	$13+17+19=7^2$	$5+7+11+13=6^2$
$47+53=10^2$	$37+41+43=11^2$	$73+79+83+89=18^2$
$71+73=12^2$	$277+281+283=29^2$	$137+139+149+151=24^2$
$283+293=24^2$	$313+317+331=31^2$	$569+571+577+587=48^2$
$881+883=42^2$		

现在还不清楚连续的 5 个、6 个素数之和为平方数的情况，但已经知道了以下等式：

$13^2=13+17+19+29+31+37$,

$29^2=73+79+83+89+97+101+103+107+109$,

$22^2=$从 11 到 61 的 14 个素数之和， [373]

$30^2=$从 37 到 97 的 14 个素数之和，

$31^2=$从 3 到 89 的 23 个素数之和，

$34^2=$从 5 到 101 的 24 个素数之和，

$37^2=$从 3 到 107 的 27 个素数之和，

$43^2=$从 3 到 131 的 31 个素数之和.

我们还知道关于立方数和 4 次方数的如下情况：

$2^3=3+5$,

$6^3=107+109$,

$11^3=439+443+449$,

$7^0+7^1+7^2+7^3=20^2$,

$3^0+3^1+3^2+3^4=11^2$,

$5^4=73+79+83+89+97+101+103$,

$3^5=41+43+47+53+59$,

$2^7=61+67$,

$2^{13}=4\ 093+4\ 099$.

西方代表性的素数表有：

J. Glaisher,《因子表》.

3 000 000—4 000 000 (1 册)

4 000 000—5 000 000 (1 册)

5 000 000—6 000 000 (1 册)

D. N. Lehmer,《首批千万的因子表》.(1914 年)

0—10 006 721 的素数表 (1 册)

0—10 017 000 素因数分解表 (1 册)

Kavan 的《因子表》,给出了到 256 000 的所有数完全分解为因子.(1937 年)

第2节 循环小数

1. 素数的倒数

[374] 正如我们在很早以前就知道的那样，$1\div 7=0.\dot{1}42\ 85\dot{7}$,6 位数后循环，循环的部分有如下性质：

$$3\times 142\ 857=428\ 571,$$
$$2\times 142\ 857=285\ 714,$$
$$6\times 142\ 857=857\ 142,$$
$$4\times 142\ 857=571\ 428,$$
$$5\times 142\ 857=714\ 285.$$

$$1+8,\quad 4+5,\quad 2+7.$$

它们对应的数字之和都是 9,这是一个非常有趣的现象.

```
       0.1 4 2 8 5 7
    7 )1 0
       7
      ----
       3 0
       2 8
      -----
         2 0
         1 4
        -----
           6 0
           5 6
          -----
             4 0
             3 5
            -----
               5 0
               4 9
              -----
                 1
```

这种性质不仅局限于 7,且某些其他素数也有这种性质.

$$\frac{1}{17}=0.\dot{0}58\,823\,529\,411\,764\,\dot{7}$$

$$\frac{1}{23}=0.\dot{0}43\,478\,260\,869\,565\,217\,391\,\dot{3}$$

这两个分数也有与 $\frac{1}{7}$ 相同的性质.在 $\frac{1}{7}$ 的情形下,142 857 乘以 3,2,6,4,5 的是计算 $\frac{1}{7}$ 时的余数.如这三道例题,具有这种性质的素数的循环位数分别为(7－1),(17－1)和(23－1).一般地,如果对于素数 p,它的倒数在 $(p-1)$ 位上循环,那么,它具有上述性质.

并不是所有的素数都具有这种性质.安部元章氏在《续·数与算盘》(1943 年)中计算了 1 000 以下的素数的倒数,明确了下 [375]
面的 60 个素数的循环位数比它本身的位数少 1 位.

7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229, 233, 257, 263, 269, 313, 337, 367, 379, 383, 389, 419,

433，461，487，491，499，503，509，541，571，577，593，619，647，659，701，709，727，743，811，821，823，857，863，887，937，941，953，971，977，983

1 000 以下的素数中，其余部分可以分两类. 第一类为如$\frac{1}{13}=0.\dot{0}76\ 92\dot{3}$和$\frac{1}{73}=0.\dot{0}13\ 698\ 6\dot{3}$的循环的位数为偶数的素数. 由于是偶数个，所以，被 2 整除，对应数字的和为

$$0+9,7+2,6+3;0+9,1+8,3+6,6+3;$$

均为常数 9.

但是，如果 p 为素数的话，$\frac{1}{13}$的循环位数为$(p-1)\div 2=6$，$\frac{1}{73}$的循环位数为$(p-1)\div 9=8$. 这里的除数分别为 2 和 9，不是一个常数. 根据安部元章氏的计算，在 1 000 以下的素数中属于该类素数的有如下 49 个，其中括弧内的是其除数：

11(5)，13(2)，73(9)，89(2)，101(25)，103(3)，127(3)，137(17)，139(3)，157(2)，197(2)，211(7)，241(8)，251(5)，281(10)，293(2)，331(3)，349(3)，353(11)，373(2)，401(2)，409(2)，421(3)，449(14)，457(3)，463(3)，521(10)，557(2)，569(2)，601(2)，607(3)，617(7)，641(20)，653(2)，661(3)，673(3)，677(2)，691(3)，739(3)，761(2)，769(4)，809(4)，829(3)，859(33)，877(2)，881(2)，929(2)，967(3)，997(6)

其第二类为如$\frac{1}{41}=0.\dot{0}24\ 3\dot{9}$和$\frac{1}{239}=0.\dot{0}04\ 184\ \dot{1}$的循环位数为奇数的素数，没有对应的数字. 属于该类的素数有 57 个，

[376] 其中括弧内的是其除数，

3(2)，31(2)，37(12)，41(8)，43(2)，53(4)，

67(2)， 71(2)， 79(6)， 83(2)，107(2)， 151(2)，
163(2)， 173(4)， 191(2)，199(2)，227(2)，239(34)，
271(54)， 277(4)， 283(2)，307(2)，311(2)， 317(4)，
347(2)， 359(2)， 397(4)，431(2)，439(2)， 443(2)，
467(2)， 479(2)， 523(2)，547(6)，563(2)， 587(2)，
599(2)，613(12)， 631(2)，643(6)，683(2)， 719(2)，
733(12)， 751(6)，757(28)，773(4)，787(2)， 797(4)，
827(2)， 839(2)， 853(4)，883(2)，907(6)， 911(2)，
919(2)， 947(2)， 991(2)

素数的倒数的循环部分为 9 的倍数，所以，把它除以 9，相乘各种各样的素数以后能够得到非常有趣的性质. 我们很容易找到如下面的各位数都为 1 的数. 在后面详细介绍这类数.

$$13\times 8\ 547=11\ 111,\quad 41\times 271=11\ 111,$$
$$73\times 152\ 207=1\ 111\ 111,\quad 239\times 4\ 649=1\ 111\ 111$$

2. 合数的倒数

关于素数和合数的倒数的研究，在西方费马(1601－1665)、欧拉(1707－1783)、高斯(1777－1855)、日本的山路主住(1704－1772)以后出现了各种研究，但并不全面. 正如前面介绍，就关于素数 p 来说，仅仅知道了 $\frac{1}{p}$ 的循环部分的位数为 $p-1$ 的约数. 关于这些问题在《林鹤一博士和算研究集录》(1937年)下卷第 748 页～第 771 页中有详细介绍.

根据这些论述可以知道，当 p 不是 2 和 5 的素数时，$a=p^n$ 形式的 a 的倒数的循环小数的位数为 $(p-1)\times p^{n-1}$ 的约数.

其次，使 2 和 5 也被包括在 a，当表示为 $a=2^m5^na'$ 的形式时，a 和 a' 的倒数的循环小数的位数是一致的.

最后，当如 $a=p_1p_2p_3\cdots$ 形式的 2 和 5 以外素数被因数分解时，a 的倒数的循环小数的位数为 $(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\cdots$ [377]

的约数.

关于循环小数，和算家做过很多研究，但林鹤一先生在该书中指出了它的不明确之处.

3. 尾约术

进行除法计算时，用第 355 页的方法求循环小数非常麻烦，所以和算家使用了尾约术的方式. 如下面，将并列放置 9，从末位开始除，使末位的数字相同地立商就可以了. 下面举 2 道例题.

```
       …0 7 6 9 2 3                       …7 3 6 8 4 2 1
     ──────────────                     ────────────────
       …9 9 9 9 9 9 (1 3                  …9 9 9 9 9 9 9 (1 9
                 3 9                                 1 9
             ────────                              ──────
               9 6                                 9 8
               2 6                                 3 8
          ─────────                              ──────
           9 9 7                                 9 6
           1 1 7                                 7 6
           ───────                           ─────────
           8 8                                9 9 2
           7 8                                1 5 2
        ──────                              ─────────
         9 1                                9 8 4
         9 1                                1 1 4
        ────                                ───────
                                            8 7
                                            5 7
                                         ───────
                                          9 9 3
                                          1 3 3
                                         ──────
```

如左边的式子，没有余数的地方开始循环. 算盘上并列放置 9，消去末位数来立商，所以非常有效.

实际上，求循环小数时有很多复杂情况，所以和算家中多数人想出了分步计算的方法.

4. 安岛直圆的研究

山路主住的弟子，和算中兴时期的鼻祖安岛直圆(1732—1798)进行了引人注目的研究.

安岛用下面的方法求出了循环位数为1,2,3,4,…的素数. [378]

位数 素数	位数 素数
1…3	10…9 091
2…11	11…21 649,513 239
3…37	12…9 901
4…101	13…53,79,265 371 653
5…41,271	14…909 091
6…7,13	15…31,2 906 161
7…239,4 649	16…17,5 882 353
8…73,137	17…
9…333 667	18…19,52 579

没有能够求出17.令人瞩目的是安岛已经知道了其中的最大素数为265 371 653.

5. 不可思议的循环小数

$$\frac{1}{19}=0.\dot{0}52\ 631\ 578\ 947\ 368\ 42\dot{1}.$$

即使不计算$\frac{1}{19}$的循环小数,如下面的计算,从有效数字开始,5除以2,商2是$\frac{1}{19}$的下一个商.并列这时的余数1和商2,作为12,然后,12除以2,以商的6作为$\frac{1}{19}$的下一个商.反复进行这个计算能够求出所有的循环小数.最后,商为1,余数为0就可以了.

$5\div2=2\cdots1$, $12\div2=6$, $6\div2=3$, $3\div2=1\cdots1$, $11\div2=5\cdots1$, $15\div2=7\cdots1$, $17\div8=2\cdots1$, $18\div2=9$, $9\div2=4\cdots1$, $14\div2=7$, $7\div2=3\cdots1$, $13\div2=6\cdots1$, $16\div2=8$, $4\div2=2$, $2\div2=1$.

同理，如果$\frac{1}{199}$从 50 开始、$\frac{1}{1\ 999}$从 500 开始，那么，依然成立. 在分母为 29，299，2 999，…，39，399，3 999，…的情形下用 3，
[379] 4，…去代替 2 来除，同样得出结论.

第3节 素因数分解

1. 1的行列

111＝3×37，

1 111＝11×101，

11 111＝41×271，

111 111＝3×7×11×13×37，

1 111 111＝239×4 649，

11 111 111＝11×73×101×137，

111 111 111＝3×3×37×333 667，

1 111 111 111＝11×41×271×9 091，

11 111 111 111＝21 649×513 239，

111 111 111 111＝3×7×11×13×37×101×9 901，

1 111 111 111 111＝53×79×265 371 653，

11 111 111 111 111＝11×239×4 649×909 091，

111 111 111 111 111＝3×31×37×41×271×2 906 161，

1 111 111 111 111 111＝11×17×73×101×137×5 882 353，

11 111 111 111 111 111＝2 071 723×5 363 222 357，

111 111 111 111 111 111＝3×3×7×11×13×19×37×52 579×333 667，

1 111 111 111 111 111 111＝素数.

11 111 111 111 111 111 111＝11×41×101×271×3 541×9 091×27 961，

111 111 111 111 111 111 111 = 3×37×43×239×1 933×4 649×10 838 689.

连续1的数字的素因数分解问题，早已引起了人们的注意．连续的个数为偶数时，被11整除．当个数为3的倍数时，被111，即被3×37整除．当个数为5的倍数时，被11 111，即被41×271整除． [380]

在上面的素因数分解中，当1为7个、11个、13个、17个、19个时最困难．在其后面的23个1的情形下，还没有判定它是否为素数．

安部元章氏用算盘继续进行这个计算，并得到了下面的结果．

因为22个连续1的数字为

$$(10^{22}-1)\div 9$$

所以，下面再来看 10^n-1 形式的素因数分解．

n	10^n-1 的因数
22	$3^2\times 11^2\times 23\times 4\ 093\times 8\ 779\times 21\ 649\times 513\ 239$
23	$3^2\times$111…(并列23个1，该数为素数)
24	$3^3\times 7\times 11\times 13\times 37\times 73\times 101\times 137\times 9\ 901\times 99\ 990\ 001$
25	$3^2\times 41\times 271\times 21\ 401\times 25\ 601\times 182\ 521\ 213\ 001$
26	$3^2\times 11\times 53\times 79\times 859\times 265\ 371\ 653\times 1\ 058\ 313\ 049$
27	$3^5\times 37\times 757\times 333\ 667\times 440\ 334\ 654\ 777\ 631$
28	$3^2\times 11\times 29\times 101\times 239\times 281\times 4\ 649\times 909\ 091\times 121\ 499\ 449$
29	$3^2\times 3\ 191\times 16\ 763\times 43\ 037\times 62\ 003\times 77\ 843\ 839\ 397$
30	$3^2\times 7\times 11\times 13\times 31\times 37\times 41\times 211\times 241\times 271\times 2\ 161\times 9\ 091\times 2\ 906\ 161$
31	$3^2\times 2\ 791\times 6\ 943\ 319\times 57\ 336\ 415\ 063\ 790\ 604\ 359$
32	$3^2\times 11\times 17\times 73\times 101\times 137\times 353\times 449\times 641\times 1\ 409\times 69\ 857\times 5\ 882\ 353$

由 32 个 1 所组成的数字以上的因数判定结果如下表：

n 10^n-1 的因数	n 10^n-1 的因数	n 10^n-1 的因数
33 67	52 53×521×859	79 317
34 103	53 107	81 163
35 71	58 59	85 191
41 83×1 231	60 61×211×241	88 89×617
42 127×43	61 733	91 547
43 173	66 67	96 97
44 89×23	69 277	98 197
46 47×139	72 73	99 67×199×397
50 251	75 151	100 101
51 613	78 157	

「381」

2. 10^n+1 的素因数分解

11＝素数，

101＝素数，

1 001＝7×11×13，

10 001＝73×137，

100 001＝11×9 091，

1 000 001＝101×9 901，

10 000 001＝11×909 091，

100 000 001＝17×5 882 353，

1 000 000 001＝7×11×13×19×52 579，

10 000 000 001＝101×3 541×27 961，

$10^{11}+1$＝11×11×23×4 093×8 779，

$10^{12}+1$＝73×137×99 990 001，

$10^{13}+1$＝11×859×1 058 313 049，

$10^{14}+1$＝29×101×281×121 499 449，

$10^{15}+1$＝7×11×13×211×241×2 161×9 091，

$10^{16}+1$＝353×449×641×1 409×69 857，

$10^{17}+1=11\times 103\times 4\ 013\times 21\ 993\ 833\ 369$,

$10^{18}+1=101\times 9\ 901\times 999\ 999\ 000\ 001$,

$10^{19}+1=11\times 909\ 090\ 909\ 090\ 909\ 091$,

$10^{20}+1=73\times 137\times 1\ 676\ 321\times 5\ 964\ 848\ 081$,

$10^{21}+1=7^2\times 11\times 13\times 127\times 2\ 689\times 459\ 691\times 909\ 091$,

$10^{30}+1=61\times 101\times 3\ 541\times 9\ 901\times 27\ 961\times 4\ 188\ 901\times 39\ 526\ 741$,

$10^{31}+1=11\times 909\ 090\ 909\ 090\ 909\ 090\ 909\ 090\ 909\ 091$.

这个素因数分解也曾经引起过人们的注意.安部元章氏把1和1之间的0的个数分成7类：

$$2n, 6n-4, 6n-1, 4n-3, 8n-5, 16n-9, 16n-1,$$

并给出了一些发现1个素因数的原则.当0为21个以上的情况时,安部元章氏得到了如下结果： [382]

1和1间的0个数	一个素因数	1和1间的0个数	一个素因数	1和1间的0个数	一个素因数
21	89	50	103	75	457
22	47×139	53	109	76	463
24	251	54	331	82	997
25	521	55	113	88	179
28	59	57	349	89	181
29	61	64	131	92	373
38	157	69	421	95	193×769
43	617	72	93	99	401
47	97	73	49	100	607×809
48	197	74	601		

安部氏进一步分类,论述了各种情形,这里介绍其中的几个：

$$\begin{cases} 10\ 101=3\times 7\times 13\times 37 \\ 1\ 001\ 001=3\times 333\ 667 \\ 100\ 010\ 001=3\times 7\times 13\times 37\times 9\ 901 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\ 101 = 111 \times 91 \\ 101\ 010\ 101 = 11\ 111 \times 9\ 091 \\ 1\ 010\ 101\ 010\ 101 = 1\ 111\ 111 \times 909\ 091 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\ 001\ 001\ 001 = 1\ 111 \times 91 \times 9\ 901 \\ 1\ 000\ 010\ 000\ 100\ 001 = 1\ 111 \times 9\ 091 \times 9\ 909\ 901 \\ 1\ 000\ 000\ 100\ 000\ 010\ 000\ 001 = 1\ 111 \times 909\ 091 \\ \qquad \times 9\ 909\ 909\ 901 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\ 010\ 101 = 101 \times 10\ 001 \\ 1\ 001\ 001\ 001 = 1\ 001 \times 1\ 000\ 001 \\ 1\ 000\ 100\ 010\ 001 = 10\ 001 \times 100\ 000\ 001 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\ 101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37 \\ 1\ 010\ 101 = 73 \times 101 \times 137 \\ 101\ 010\ 101 = 41 \times 271 \times 9\ 091 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

[383]

$$\begin{cases} 1\ 001 = 7 \times 11 \times 13 \\ 1\ 001\ 001 = 3 \times 333\ 667 \\ 1\ 001\ 001\ 001 = 7 \times 11 \times 13 \times 101 \times 9\ 901 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\ 001 = 73 \times 137 \\ 100\ 010\ 001 = 3 \times 7 \times 13 \times 37 \times 9\ 901 \\ 1\ 000\ 100\ 010\ 001 = 17 \times 73 \times 137 \times 5\ 882\ 353 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100\ 001 = 11 \times 9\ 091 \\ 10\ 000\ 100\ 001 = 3 \times 31 \times 37 \times 2\ 906\ 161 \\ 1\ 000\ 010\ 000\ 100\ 001 = 11 \times 101 \times 9\ 901 \times 99\ 009\ 901 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$2^7=m\cdot 27-7$	$6^7=m\cdot 27$
$3^7=m\cdot 27$	$7^7=m\cdot 27-11$
$4^7=m\cdot 27-5$	$8^7=m\cdot 27+8$
$5^7=m\cdot 27-13$	$9^7=m\cdot 27$

$1=m\cdot 17+1$	$10^{10}=m\cdot 17+2$
$10^2=m\cdot 17-2$	$10^{12}=m\cdot 17-4$
$10^4=m\cdot 17+4$	$10^{14}=m\cdot 17+8$
$10^6=m\cdot 17-8$	$10^{16}=m\cdot 17+1$
$10^8=m\cdot 17-1$	… …

$6=m\cdot 31+6$	$5=m\cdot 31+5$
$6^2=m\cdot 31+5$	$5^2=m\cdot 31-6$
$6^3=m\cdot 31-1$	$5^3=m\cdot 31+1$

$2=m\cdot 13+2$	$2^4=m\cdot 13+3$
$2^2=m\cdot 13+4$	$2^5=m\cdot 13+6$
$2^3=m\cdot 13+8$	$2^6=m\cdot 13-1$ [384]

$3=m\cdot 13+3$	$5=m\cdot 13+5$
$3^2=m\cdot 13+9$	$5^2=m\cdot 13-1$
$3^3=m\cdot 13+1$	

$1^8=m\cdot 17+1$	$5^8=m\cdot 17-1$
$2^8=m\cdot 17+1$	$6^8=m\cdot 17-1$
$3^8=m\cdot 17-1$	$7^8=m\cdot 17-1$
$4^8=m\cdot 17+1$	$8^8=m\cdot 17+1$

第4节 悖论(Paradox)

(1) 设 $a=b$,那么

$$ab=a^2,\text{即 } ab-b^2=a^2-b^2,$$

故

$$a(a-b)=(a+b)(a-b).$$

用 $a-b$ 除等式两边

$$a=a+b,故\ a=2a,$$

故

$$1=2.$$

(2) 等式

$$4-12+9=9-12+4,$$

成立. 故

$$(2-3)^2=(3-2)^2,$$

故

$$2-3=3-2,$$

故

$$4=6.$$

(3) 设 a,b 为不同的两个数,c 为它们的平均值,即 $a+b=2c$,那么

[385]

$$(a+b)(a-b)=2c(a-b),$$
$$a^2-b^2=2ac-2bc,$$
$$a^2-2ac=b^2-2bc,$$
$$a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2,$$
$$(a-c)^2=(b-c)^2,$$
$$a-c=b-c,$$
$$a=b.$$

与假设矛盾.

(4) 设 a 和 b 为不相等的两个数,c 为它们的差,即 $c=a-b$,用$(a-b)$乘等式两边,得

$$c(a-b)=(a-b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=ac-bc,$$
$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc,$$

$$a(a-b-c)=b(a-b-c),$$
$$a=b.$$

与假设矛盾.

(5) 下面等式成立

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-+\cdots$$

如果这里 $x=1$,那么

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-+\cdots$$

(6) $(-1)^2=1$ 成立.两边取对数,那么

$$2\log(-1)=\log 1=0,$$
$$\log(-1)=0,$$
$$-1=e^0=1.$$

(7) 设 x 为 $e^x=-1$ 的根.两边乘平方得

$$e^{2x}=1,\text{即 } 2x=0.$$

故

$$x=0,\text{又 } e^0=1,\text{又 } -1=1.$$

(8) 对数函数展开式

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots.$$ [386]

取 $x=1$,则

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots.$$

两边乘倍

$$2\log 2=2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+-\cdots.$$

集中相同分母的分数后得

$$2\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots=\log 2,$$

故 $$2=1.$$

(9) 在上面的展开式中取 $x=1$.

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)$$

$$=\left\{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\right\}$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

$$=0,$$

即

$$e^0=2,$$

故

$$1=2.$$

(10) 下面的等式成立.

$$\sqrt{\frac{-1}{1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}},$$

$$(\sqrt{-1})^2=(\sqrt{1})^2,$$

$$-1=1.$$

(11) i 为虚数,即 $i^2=-1$,则下面等式成立

$$\sqrt{x-y}=i\sqrt{y-x},\quad \sqrt{y-x}=i\sqrt{x-y},$$

两边相乘

$$\sqrt{(x-y)(y-x)}=i^2\sqrt{(y-x)(x-y)},$$

故

[387] $$i^2=1,$$

故

$$-1=1.$$

(12) 恒等式 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$,取 $a=b=-1$.

$$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)},$$

$$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{1},$$

$$-1=1.$$

(13) 设 $ad=bc$,则

$$a:b=c:d.$$

如果 $a>b$,则 $c>d$. 然而当 $a=d=1,b=c=-1$ 时,最初的等式也成立. 所以,也满足 $a>b$. 故

$$c>d,$$

$$-1>1.$$

(14) 设 $x=\sqrt{2}$,则

$$x^2=2.$$

对于指数 2,反复地代入等式

$$2=x^2=x^{x^2}=\cdots=x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}.$$

用 2 乘等式两边,$4=x^4$. 同理,

$$4=x^4=x^{x^4}=\cdots=x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}},$$

故

$$2=4.$$

(15) 三角形 ABC 的顶角的平分线与底边的垂直平分线的交点为 O(O 在三角形内部的情形).

其中,三角形 ADO 和 CDO 为合同三角形,所以

$$AO=CO.$$

自 O 引两边 AB,CB 的垂线 OE,OF,那么,两个直角三角形 BOE 和 BOF 有公共斜边,由于一个角相等,所以,两个三角形 [388]
为合同. 因而,两个直角三角形 AOE 和 COF 中,斜边和一边相等,所以也是合同的. 从而有

$$AB=BC.$$

O 在三角形外部的情形下,变成如下图,与前面的方法相同,从 O 引垂线 OE,OF,那么

$$\triangle ODA \cong \triangle ODC, \triangle OBE \cong \triangle OBF,$$

$$\triangle OEA \cong \triangle OFC,$$

$$EB = FB, EA = FC,$$

相减对应边得

$$AB = BC.$$

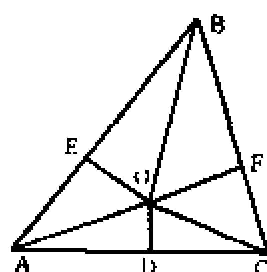


图 1

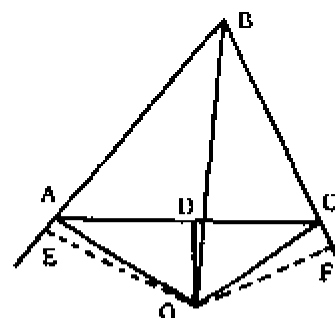


图 2

（16）设三角形 ABC 的三边为 AB, BC, AC 的中点为 D, E, F,则

$$BE = DF, EF = BD,$$

故

$$AB + BC = AD + DF + FE + EC.$$

继续相加得

$$AB + BC = AG + GH + HI + IF + FJ + JK + KL + LC.$$

这个过程是无限的,继续进行计算后得

$$AB + BC = AC.$$

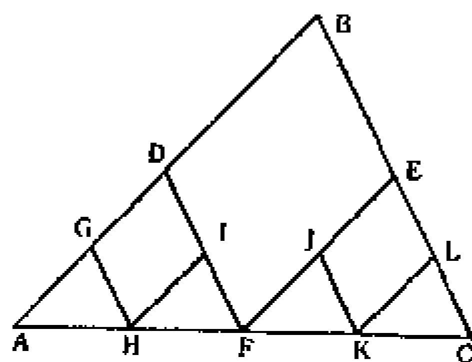


图 3

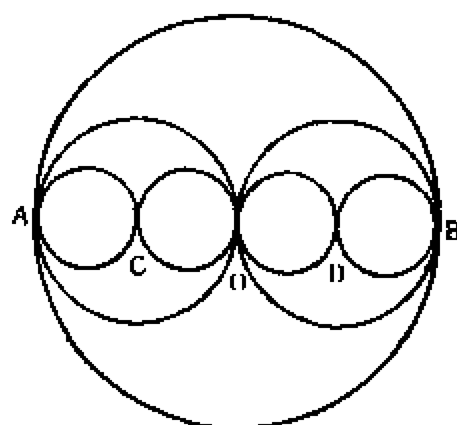


图 4

圆的情形也相同,设 d 为直径,圆周为 πd,以该圆的半径为直径的两圆的周长的和为 [389]

$$\frac{\pi d}{2}+\frac{\pi d}{2}=\frac{\pi}{2}(2d)=\pi d,$$

故　　　圆 O 的周长=圆 C 的周长+圆 D 的周长.

继续进行这个过程后,圆 O 的周长就会等于该圆的直径.

第5节　9 的 游 戏

1859 年 1 月 18 日,惠威尔(Dr. W. Whewell)在给英国数学教育的权威德·摩根写的一封信中说:

"我想可以用 4 个 9 来表示从 1 到 15 的数. 例如,$2=\frac{9}{9}+\frac{9}{9}$. 请问继续这项工作有没有价值?"

德·摩根回信说,试一试 15 以上的数字也很有价值,而且在教育方面也有很大的作用. 于是,以 Whewell 博士的名字命名了这个难题.

问题为,用 4 个 9 以及在数学中允许使用的+、-、×、÷、()等符号来表示 1,2,3,4、…. 首先,看简单的例子.

$0=9+9-9-9=99-99$,　　　$1=\frac{99}{99}=\frac{9\times 9}{9\times 9}$,

$2=\frac{9}{9}+\frac{9}{9}=\frac{99}{9}-9$,　　　$3=\frac{9+9+9}{9}$,

$4=\frac{9}{9}+\frac{9}{\sqrt{9}}$,

$5=9-\frac{9}{9}-\sqrt{9}=\frac{9+9}{9}+\sqrt{9}$,

$6=\sqrt{9+9+9+9}=9-9+9-\sqrt{9}$,

$7=9-\frac{9+9}{9}=9-\sqrt{9}+\frac{9}{9}$, [390]

$$8=\frac{9\times9-9}{9}=\frac{99}{9}-\sqrt{9},$$

$$9=9+\frac{9-9}{9}=\frac{9\sqrt{9\times9}}{9},$$

$$10=\frac{99-9}{9}=\frac{9\times9+9}{9},$$

$$11=\frac{9+9}{9}+9=9+\sqrt{9}-\frac{9}{9},$$

$$12=\frac{99+9}{9}=\sqrt{9}+\sqrt{9}+\sqrt{9}+\sqrt{9},$$

$$13=9+\frac{9}{9}+\sqrt{9},\qquad 14=\frac{99}{9}+\sqrt{9},$$

$$15=9+9-\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9+9}{\sqrt{9}}+9,\qquad 16=\frac{9}{.9}+9-\sqrt{9}.$$

这里进来了符号.9.这是把 0.9 的 0 去掉后的表示方法，当然允许这种表示方法.

$$17=9+9-\frac{9}{9},\quad 18=9+9+9-9,$$

$$19=9+9+\frac{9}{9},\quad 20=9+\frac{99}{9}.$$

用这种方法表示所得出的结果早已突破了 100.尤其是表示 25 时，有 $25=9+\frac{9}{.9}+\sqrt{9}!$.

类似的也有 $\sqrt{9}!=1\times2\times3=6$.

又有

$$32=\frac{99}{\sqrt{9}}-.\dot{9}.$$

这里 $.\dot{9}=0.9999\cdots=1$.这也是允许的约束，就数学上来说并不是非自然的作法.

浦田繁松得到了土师民三郎和泉行藏的协助，用以上方法一直作到 132.下面列举从 38 到 100 的数字.

$$38=\left(\sqrt{9}!+\frac{\sqrt{9}}{9}\right)\times\sqrt{9}!=\sqrt{9}!\times\sqrt{9}!+.\dot{9}+.\dot{9},$$

$$41=\frac{(\sqrt{9}!)!}{9+9}+.\dot{9}=\sqrt{9}!\times\sqrt{9}!+\sqrt{9}!-.\dot{9},$$

$$47=(9-.\dot{9})\times\sqrt{9}!-.\dot{9}=9\times\sqrt{9}!-\sqrt{9}!-.\dot{9},$$ [391]

$$49=(9-.\dot{9})\times\sqrt{9}!+.\dot{9}=(\sqrt{9}!+.\dot{9})\times(\sqrt{9}!+.\dot{9}),$$

$$65=\frac{9!}{9\times(\sqrt{9}!)!}+9=\frac{(\sqrt{9}!)!}{9}-9-\sqrt{9}!,$$

$$67=\sqrt{9+\frac{9!}{9\times9}}=(\sqrt{9}+.\dot{9})^{\sqrt{9}}+\sqrt{9},$$

$$68=\frac{(\sqrt{9}!)!}{9}-9-\sqrt{9},$$

$$100=99+\frac{9}{9}=(9+.\dot{9})^{\sqrt{9}-.\dot{9}}.$$

除了以上难题的表示方法以外，还有其他若干种表示方法，但到了100以上数字后就逐渐地减少.

$$101=\frac{99}{.9}-9=99+.\dot{9}+.\dot{9},$$

$$102=99+\frac{9}{\sqrt{9}}=99\times.\dot{9}+\sqrt{9},$$

$$103=99+\sqrt{9}+.\dot{9},$$

$$104=99+\sqrt{9}!-.\dot{9}=\frac{99}{.9}-\sqrt{9}!,$$

$$105=99+9-\sqrt{9}=99+\sqrt{9}+\sqrt{9},$$

$$106=99+\sqrt{9}!+.\dot{9},$$

$$107=99+9-.\dot{9}=\frac{99}{.9}-\sqrt{9},$$

$$108=99+9\times.\dot{9}=9\times9+9\times\sqrt{9},$$

$109=99+9+.\dot{9}=99+\frac{9}{.9}$，

$110=\frac{99\times.\dot{9}}{9}=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!-9-.\dot{9}$，

$111=\frac{999}{9}=99+9+\sqrt{9}$，

$112=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!-9+.\dot{9}=\frac{(\sqrt{9}!)!}{\sqrt{9}!}-9+.\dot{9}$，

[392] $113=\frac{99}{.9}+\sqrt{9}=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!-\sqrt{9}!-\dot{9}$，

$114=99+9+\sqrt{9}!=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!-\sqrt{9}-\sqrt{9}$，

$115=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!-\sqrt{9}!+.\dot{9}$，

$116=\frac{99}{.9}+\sqrt{9}!=(\sqrt{9}!-.\dot{9})^{\sqrt{9}}-9$，

$117=99+9+9=(9.\dot{9}+\sqrt{9})\times9$，

$118=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!-.\dot{9}-.\dot{9}=\frac{(\sqrt{9}!)!}{\sqrt{9}!}-\sqrt{9}+.\dot{9}$，

$119=\frac{99}{.9}+9=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!-\frac{9}{9}$，

$120=\frac{99+9}{.9}=(9+\sqrt{9})\times(9+.\dot{9})$，

$121=\left(\frac{9}{.9+.9}\right)!+.\dot{9}=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!+\frac{9}{9}$，

$122=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!+.\dot{9}+.\dot{9}=(\sqrt{9}!-.\dot{9})^{\sqrt{9}}-\sqrt{9}$，

$123=\left(\frac{9}{.9+.9}\right)!+\sqrt{9}=(\sqrt{9}+.\dot{9}+.\dot{9})!+\sqrt{9}$，

$124=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!+\sqrt{9}+.\dot{9}=(\sqrt{9}!-.\dot{9})^{\sqrt{9}}-.\dot{9}$，

$125=\left(\frac{9}{.9+.9}\right)^{\sqrt{9}}=(\sqrt{9}+.\dot{9}+.\dot{9})^{\sqrt{9}}$，

$$126=99+9\times\sqrt{9}=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!+\sqrt{9}+\sqrt{9},$$

$$127=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!+\sqrt{9}!+.\dot{9}=\frac{(\sqrt{9}!)!}{\sqrt{9}!}+\sqrt{9}!+.\dot{9}.$$

$$128=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!+9-.\dot{9}=(\sqrt{9}!-.\dot{9})^{\sqrt{9}}+\sqrt{9},$$

$$129=\left(\frac{9}{.9+.9}\right)!+9=(9-\sqrt{9}-.\dot{9})!+9,$$

$$130=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!+9+.\dot{9}=\frac{(\sqrt{9}!)!}{\sqrt{9}!}+9+.\dot{9},$$

$$131=(\sqrt{9}!-.\dot{9})^{\sqrt{9}}+\sqrt{9}!,$$

$$132=(9+\sqrt{9}!)\times9-\sqrt{9}=(\sqrt{9}!-.\dot{9})!+9+\sqrt{9}.$$

[393]

第6节 4 的 游 戏

4 的游戏与 9 的情况相同. W. W. Rouse Ball(1850—1925)于 1913 年在给英国的《数学杂志》上投稿时提出：

“四次用 4，作了从 1 到 1 000 的数字，但其中的 113，157，878，881，893，917，943，946，947 还没有能够作出来，问有什么方法？”

至今这个问题还没有结果.

这个问题以“四个四”的名字流传下来了. 下面列举浦田繁松氏《作数》(1935 年)中的从 0 到 112 的解.

$0=44-44,$ $\quad 1=\dfrac{44}{44},$

$2=\dfrac{4}{4}+\dfrac{4}{4},$ $\quad 3=\dfrac{4+4+4}{4},$

$4=4+(4-4)\times4,$ $\quad 5=\dfrac{4\times4+4}{4},$

$6=\dfrac{4+4}{4}+4,$ $\quad 7=\dfrac{44}{4}-4,$

$8=4+4+4-4$，　　$9=4+4+\frac{4}{4}$，

$10=\frac{44-4}{4}$，　　$11=\frac{4}{.4}+\frac{4}{4}$，

$12=\frac{44+4}{4}$，　　$13=\frac{4-.4}{4}+4$，

$14=4+4+4+\sqrt{4}$，　　$15=\frac{44}{4}+4$，

$16=4+4+4+4$，　　$17=4\times4+\frac{4}{4}$，

$18=\frac{4}{.4}+4+4$，　　$19=\frac{4+4-.4}{.4}$，

$20=\left(4+\frac{4}{4}\right)\times4$，　　$21=\frac{4.4+4}{.4}$，$22=\frac{44\times\sqrt{4}}{4}$，

$23=\frac{4!\times4-4}{.4}$，　　$24=4\times4+4+4$，

$25=4\times4+\frac{4}{.\dot{4}}$，　　$26=4\times4+\frac{4}{.4}$，

$27=\frac{4+4+4}{.\dot{4}}$，　　$28=44-4\times4$，

$29=\frac{4}{.4+.4}+4$，　　$30=\frac{4+4+4}{.4}$，

$31=4!+\frac{4}{.\dot{4}}-\sqrt{4}$，　　$32=4\times4+4\times4$，

[394]　$33=\frac{44}{\sqrt{4\times.\dot{4}}}$，　　$34=44-\frac{4}{.4}$，

$35=44-\frac{4}{.\dot{4}}$，　　$36=44-4-4$，

$37=4!+4+\frac{4}{.\dot{4}}$， $38=44-4-\sqrt{4}$，

$39=\frac{4\times4-.\dot{4}}{.4}$， $40=44-\sqrt{4\times4}$，

$41=\frac{4\times4+.4}{.4}$， $42=44+\sqrt{4}-4$，

$43=44-\frac{4}{4}$， $44=44+4-4$，

$45=44+\frac{4}{4}$， $46=44+4-\sqrt{4}$，

$47=44+\sqrt{\frac{4}{.\dot{4}}}$， $48=(4+4+4)\times4$，

$49=44+\frac{\sqrt{4}}{.4}$， $50=\frac{4\times4+4}{.4}$，

$51=\frac{4!+.4-4}{.4}$， $52=44+4+4$，

$53=44+4\div.\dot{4}$， $54=44+4\div.4$，

$55=\frac{44}{.4+.4}$， $56=(4\times4-\sqrt{4})\times4$，

$57=\frac{4!+.4}{.4}-4$， $58=\frac{4!}{.4}+\sqrt{4}-4$，

$59=\frac{4!}{.4}-\frac{4}{4}$， $60=44+4\times4$，

$61=\frac{4!}{.4}+\frac{4}{4}$， $62=4\times4\times4-\sqrt{4}$，

$63=\frac{4!-.\dot{4}}{.4}+4$， $64=(4+4)\times(4+4)$，

$65=\frac{4!+.4}{.4}+4$， $66=4\times4\times4+\sqrt{4}$，

$67=\frac{4!+4}{.\dot{4}}+4$， $68=4\times4\times4+4$，

$69=\frac{4!+\sqrt{4}}{.4}+4$， $70=\frac{44}{\sqrt{.\dot{4}}}+4$，

$71=\frac{4!+4.4}{.4}$， $72=44+4!+4$，

$73=\frac{4!\times\sqrt{4}+\sqrt{.\dot{4}}}{\sqrt{.\dot{4}}}$， $74=\frac{4!+4}{.4}+4$，

$75=\frac{44}{.\dot{4}}-4!$， $76=(4!-4)\times4-4$，

$77=\frac{4!}{.\dot{4}\times\sqrt{.\dot{4}}}-4$， $78=4(4!-4)-\sqrt{4}$，

$79=\frac{4!-\sqrt{4}}{.4}+4!$， $80=(4\times4+4)\times4$，

$81=\frac{4-.4}{.\dot{4}-.4}$， $82=(4!-4)\times4+\sqrt{4}$，

$83=\frac{4!-.4}{.4}+4!$， $84=44\times\sqrt{4}-4$，

$85=\frac{4!+.4}{.4}+4!$， $86=\frac{4}{.\dot{4}-.4}-4$，

$87=4!\times4-\frac{4}{.\dot{4}}$， $88=44+44$，

$89=\frac{4!+\sqrt{4}}{.4}+4!$， $90=\frac{44-4}{.\dot{4}}$，

$91=4!\times4-\frac{\sqrt{4}}{.4}$， $92=44\times\sqrt{4}+4$，

$93=4!\times 4-\sqrt{\dfrac{4}{.\dot{4}}}$，　　　　$94=\dfrac{4}{.\dot{4}-.4}+4$，

$95=\dfrac{44}{.\dot{4}}-4$，　　　　$96=(44+4)\times\sqrt{4}$，

$97=4!\times 4+\dfrac{4}{4}$　　　　$98=\dfrac{44-.\dot{4}}{.\dot{4}}$，　　　　[395]

$99=\dfrac{44}{.\dot{4}\dot{4}}$，　　　　$100=\dfrac{44}{.44}$，

$101=\dfrac{44}{.\dot{4}}+\sqrt{4}$，　　　　$102=4!\times 4+4+\sqrt{4}$，

$103=\dfrac{44}{.\dot{4}}+4$，　　　　$104=4!\times 4+4+4$，

$105=\dfrac{44-\sqrt{4}}{.4}$，　　　　$106=\dfrac{44}{.4}-4$，

$107=\dfrac{4!\times\sqrt{4}-.\dot{4}}{.\dot{4}}$，　　　　$108=\dfrac{44+4}{.\dot{4}}$，

$109=\dfrac{44-.4}{.4}$，　　　　$110=\dfrac{44}{\sqrt{.4\times .4}}$，

$111=\dfrac{444}{44}$，　　　　$112=\dfrac{44}{.4}+\sqrt{4}$.

（这里，$.\dot{4}=.\dot{4}\dot{4}=0.444\cdots=\dfrac{4}{9}$.）

9 的游戏和 4 的游戏相同，对于只使用 4 次其他数字也能从 0 到某一数为止继续作数，浦田繁松氏得到了如下结果：

1…34，2…36，3…64，4…112，5…36，6…30，7…25，8…36，9…132.

第 7 节　数字游戏的奥林匹克

扩展上述 9 的游戏和 4 的游戏，1948 年境新氏提出了分别使用 1，9，4，8 四个数字作从 0 到 100 的数字的问题. 他曾希望从每年的日历数字中征集得到最好的方法. 他给这个游戏起名为“数字游戏的奥林匹克”. 下面列举最近的最佳结果：

$0=15-9-6$ [2]，　$1=6+5-1-9$ [3]，
$2=61-59$ [1]，　$3=1-9+5+6$ [3—1]，
$4=(19+5)\div 6$ [6—1]，　$5=9-6\div 1.5$ [5]，
$6=1\times 9-5\times .6$ [7—1]，　$7=9+5-6-1$ [3]，
$8=19-5-6$ [2—1]，　$9=1+9+5-6$ [3—1]，
$10=1\times 9-5+6$ [4—1]，　$11=1+9-5+6$ [3—1]，
$12=16+5-9$ [2]，　$13=9+6\div 1.5$ [5]，
$14=91\div 6.5$ [4]，　$15=(5-1)\times 6-9$ [7]，
$16=61-9\times 5$ [3]，　$17=1.6\times 5+9$ [5]，
$18=69-51$ [1]，　$19=9+6+5-1$ [3]，
$20=19-5+6$ [2—1]，　$21=1+9+5+6$ [3—1]，
$22=19+5\times .6$ [5—1]，　$23=16\div .3-9$ [5]，
$24=96\div(5-1)$ [6]，　$25=9\div .1-65$ [5]，
[396]　$26=91-65$ [1]，　$27=(1+5)\times 6-9$ [7]，
$28=1+9\times 5\times .6$ [7—1]，　$29=9\times 5-16$ [3]，
$30=19+5+6$ [2—1]，　$31=19+6\div .5$ [5]，
$32=19\div .5-6$ [5—1]，　$33=(5-1)\times 6+9$ [7]，
$34=95-61$ [1]，　$35=91-56$ [1]，
$36=51-9-6$ [2]，　$37=56-19$ [1]，
$38=9\times 5-1-6$ [4]，　$39=9\times 6-15$ [3]，
$40=1+9\times 5-6$ [4—1]，　$41=16\div .5+9$ [5]，

42=(5−1)×9+6	[7],	43=59−16	[1],
44=19÷.5+6	[5−1],	45=96−51	[1],
46=65−19	[1],	47−61−9−5	[2],
48=1−9+56	[2−1],	49=19+5×6	[3−1],
50=9×6+1−5	[4],	51=1×9×5+6	[5−1],
52=59−6−1	[2],	53=1×59−6	[3],
54=69−15	[1],	55=65−9−1	[2],
56=1×65−9	[3],	57=61+5−9	[2],
58=9×6+5−1	[4],	59=1×9×6+5	[5],
60=9×6+5+1	[4],	61=9×5+16	[3],
62=1×65−$\sqrt{9}$	[8],	63=69−5−1	[2],
64=59+6−1	[2],	65=69+1−5	[2],
66=1+9+56	[2−1],	67=69−1÷.5	[5],
68=(1+6)×9+5	[7],	69=9×6+15	[3],
70=(9+6−1)×5	[7],	71=16×5−9	[3],
72=1.6×5×9	[6],	73÷69+5−1	[2],
74=1×9+65	[3],	75=19+56	[1−1],
76=51÷.6−9	[5],	77=(16)−59	[6],
78=(9+5−1)×6	[7],	79=95−16	[1],
80=91−5−6	[2],	81=96−15	[1],
82=1+96−(5)	[7],	83=(9+5)×6−1	[7],
84=19+65	[1],	85=1+(9+5)×6	[7−1],
86=96−($\overline{5-1}$)	[7],	87=($\overline{6+1}$)+59	[7],
88=95−1−6	[2],	89=1×95−6	[3−1],
90=1+95−6	[2−1],	91=1×96−5	[3],
92=1+96−5	[2],	93=$\lfloor\underline{5-1}$+69	[7],
94=96−1÷.5	[5],	95=$\lfloor\underline{5}$−19−6	[7],

$96=15.\dot{9}\times 6$ [7]， $97=(\overline{9+5-1})+6$ [8]，

$98=19.6\times 5$ [4]， $99=15\times 6+9$ [3]，

$100=95+6-1$ [2].

这是使用 1,9,5,6 四个数字作从 0 到 100 的数字的漂亮例

[397] 题，但到现在为止还没有作出 77 和 82，为了作数字的目的使用了特殊符号，即

$$⑯=\sum 16=1+2+3+\cdots+16=136$$

$$⑤=\sum 5=1+2+3+4+5=15$$

这里仅仅是把符号简单化了. 在 86,87,97 中也使用了特殊的表示方法. 这样，当下页那样重复的情形下(　)具有省略的好处.

$$(\overline{5-1})=\sum(5-1)=1+2+3+4=10$$

$$(\overline{6-1})=\sum(6-1)=1+2+3+4+5=15$$

在 93 和 95 的例中使用了阶乘的古代符号，以便节约(　)，

$$|\underline{5-1}=(5-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$

$$|\underline{5}=5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$$

在 96 中 $15.\dot{9}$ 表示无限循环小数，

$$15.\dot{9}=15.999\,9\cdots=16$$

广泛地征集问题的解答，为比较优劣，根据所使用的符号的次数和种类，设定了下面的规定：

+，−……1 分；　　×，÷，小数点……2 分；

(　)……3 分；　　其他符号……5 分；

当按 1,9,5,6 的顺序排列时……−1 分.

其中，其他符号指的是根号、循环小数的符号、阶乘!、总和 $\sum$ 等符号. 这里记分数的是上表中的[　]内的数. 合计这些符号出现的多少当作了评分的标准，即分数. 所以，合计分数少的是优秀成绩. 至今的成绩如下：

1 948……410－19＝391，　　1 949……530－34＝496

1 950……589－26＝563，　　1 951……492－34＝458

1 952……347－23＝324　　1 953……351－22－329

1 954……383－29＝354，　　1 955……485－38＝447

1 956……382－23＝359

1 956 为顺利和谐，但 1 955 中 ⌊398⌋

$$32=(1+5)''+5-9=15.\dot{9}\div .5$$

$$67-51+(9-5)''=51.\dot{9}+⑤$$

1 954 中

$$76=59+1+4''=41\div .5-\sqrt{9}!\ =⑤\times(9-4)+1$$

$$80=1+95-4''=9\times(5+4)-1$$

这里的 "是表示平方的符号.使用这个符号使得表示更加简单，而且能够作出用现在的符号尚没有作出的一些表达式.从罗素的数学是符号逻辑学这个观点看，当然允许引入这些符号.

以上为境新氏的尝试，泉行藏氏进一步从符号逻辑学的观点提出：

“最小限度地使用同一个数字，如何制作年号的数字？”最近出现的例子有

$$1956=\sqrt{.\dot{1}}\div .\dot{1}''''-\boxed{\boxed{\boxed{1+1}!}}\qquad 1956=\boxed{\boxed{2''}}\times\boxed{\boxed{2}}''-\lfloor\!\underline{2}''$$

$$1956=3''''''\div 3-\boxed{\boxed{3!}}\qquad 1956=\boxed{4''''}\div 4''-\boxed{4}''$$

$$1956=\lfloor\!\underline{5}\div .5''''+\boxed{\boxed{5}\div 5}''\qquad 1956=\boxed{6''}+6''''-6$$

$$1956=\boxed{7''}+(\lfloor\!\underline{7}+77)\div 7\qquad 1956=\lfloor\!\underline{8}\div\boxed{\sqrt{\boxed{8}}}+\boxed{8}$$

$$1956=9''''\div\sqrt{9}-\boxed{\boxed{\sqrt{9}!}}$$

这里需要说明以下几点.1 的前半为

$$.\dot{1}=0.111\cdots=\frac{1}{9},\ \sqrt{\frac{1}{9}}\times 9^4=2\ 187,$$

$9^{2\cdot 2}$ 约定为 9^4.后半为

$$\sum\sum\{\sum(1+1)\}! = \sum\sum\{1+2\}!$$
$$= \sum\sum(1\cdot 2\cdot 3)$$
$$= \sum(1+2+3+4+5+6)$$
[399]
$$= \sum(21) = 1+2+3+\cdots+21$$
$$= 231,$$

2 为

$$\sum\sum 2^2 \times (\sum\sum 2)^2 - (2^2)!$$
$$= \sum\sum 4 \times \{\sum(1+2)\}^2 - 4!$$
$$= \sum(1+2+3+4) \times (1+2+3)^2 - 24$$
$$= (\sum 10) \times 36 - 24$$
$$= 1\,980 - 24 = 1\,956,$$

3 为

$$3^{2\cdot 3\cdot 2} \div 3 - \sum\sum(3!) = 3^8 \div 3 - \sum\sum 6$$
$$= 3^7 - \sum 21$$
$$= 2\,187 - 231 = 1\,956,$$

8 为

$$8! \div \sum\sqrt{\sum 8} + \sum 8 = 8! \div \sum 6 + 36$$
$$= 1\,920 + 36$$
$$= 1\,956.$$

在允许使用这些符号的条件下，从未想过仅用 3 个数字表示 1 956 吧. 这些符号绝对不是不合理的. 符号逻辑学观点是允许的.

境新氏和泉行藏氏等人已经开始了用 1 到 5 的数字制作从 0 到 10 000 的数字的工作.

第8节 小 町 算[①]

1. 小町算

不破坏数字1，2，3，4，5，6，7，8，9的顺序，它们之间插入＋，－，×，÷，()等符号，作一定的数.这是日本国从古代流传下来的“小町算”游戏.下面说明它的由来.尽管现在还不清楚这个游戏从什么时候开始引起人们的注意，但它是数学游戏的代表作.

下面用浦田繁松氏的研究实例来说明这个游戏.

首先，仅使用＋和－，制作其答案为100的式子.这里有1～9的按自然顺序排列的正向12道题和按逆顺序排列的逆向 [400]
18道题.

	正向	符号个数
1)	123－45－67＋89＝100	3
2)	123＋45－67＋8－9＝100	4
3)	123＋4－5＋67－89＝100	4
4)	123－4－5－6－7＋8－9＝100	6
5)	12＋3＋4＋5－6－7＋89＝100	6
6)	12＋3－4＋5＋67＋8＋9＝100	6
7)	12－3－4＋5－6＋7＋89＝100	6
8)	1＋23－4＋56＋7＋8＋9＝100	6
9)	1＋23－4＋5＋6＋78－9＝100	6
10)	1＋2＋34－5＋67－8＋9＝100	6
11)	1＋2＋3－4＋5＋6＋78＋9＝100	7
12)	－1＋2－3＋4＋5＋6＋78＋9＝100	8

① “小町”的原来意思为，漂亮的姑娘.

	逆向	符号个数
1)	98－76＋54＋3＋21＝100	4
2)	9－8＋76＋54－32＋1＝100	5
3)	98－7－6－5－4＋3＋21＝100	6
4)	9－8＋76－5＋4＋3＋21＝100	6
5)	9－8＋7＋65－4＋32－1＝100	6
6)	98＋7＋6－5－4－3＋2－1＝100	7
7)	98＋7－6＋5－4＋3－2－1＝100	7
8)	98＋7－6＋5－4－3＋2＋1＝100	7
9)	98＋7－6－5＋4＋3－2＋1＝100	7
10)	98－7＋6＋5＋4－3－2－1＝100	7
11)	98－7＋6＋5－4＋3－2＋1＝100	7
12)	98－7＋6－5＋4＋3＋2－1＝100	7
[401] 13)	98－7－6＋5＋4＋3＋2＋1＝100	7
14)	9＋8＋76＋5＋4－3＋2－1＝100	7
15)	9＋8＋76＋5－4＋3＋2＋1＝100	7
16)	－9＋8＋76＋5－4＋3＋21＝100	7
17)	－9＋8＋7＋65－4＋32＋1＝100	7
18)	－9－8＋76－5＋43＋2＋1＝100	7

用＋，－，×，÷四个符号，已经发现了正向题为 150 道，逆向题为 198 道，下面给出正向的 10 道题. 在惯例上，×，÷计算在＋，－计算之前.

1)	1＋234－56－7－8×9＝100	5
2)	1＋234×5÷6－7－89＝100	5
3)	1×234＋5－67－8×9＝100	5
4)	12＋3×45＋6×7－89＝100	5
5)	1＋2×34－56＋78－9＝100	5
6)	123＋4×5－6×7＋8＋9＝100	6

7)	$12+3\times4-5-6+78+9=100$	6
8)	$12+3\times4+5+6+7\times8+9=100$	7
9)	$12-3-4+5\times6+7\times8+9=100$	7
10)	$1+2\times3+4\times5-6+7+8\times9=100$	8

如果用括弧和小数点的话会得到更多的解，这里省略了.

2. 各种小町算

(a) 首先，用从 1 到 9，或 0 到 9 的数字来表示 100.

$$100=3+\frac{69\ 258}{714}=81+\frac{5\ 643}{297}=81+\frac{7\ 524}{396}$$

$$=82+\frac{3\ 546}{197}=91+\frac{5\ 742}{638}=91+\frac{5\ 823}{647}$$

$$=91+\frac{7\ 524}{836}=94+\frac{1\ 578}{263}=96+\frac{1\ 428}{357}$$

$$=96+\frac{1\ 752}{438}=96+\frac{2\ 148}{537}$$

$$100=75+24+\frac{9}{18}+\frac{3}{6}=97+\frac{5+3}{8}+\frac{6}{4}+\frac{1}{2}$$

$$100=27+\frac{65\ 043}{891}=36+\frac{57\ 024}{891}=43+\frac{51\ 072}{896}$$

$$=45+\frac{21\ 780}{396}=51+\frac{34\ 692}{708}=72+\frac{13\ 860}{495}$$

$$=73+\frac{24\ 516}{908}=82+\frac{10\ 674}{593},$$

$$100=50+49+\frac{1}{2}+\frac{38}{76}=90+8+\frac{3}{6}+1+\frac{27}{54}.$$

用从 1 到 9 或 0 到 9 的数来表示 9.

$$9=\frac{57\ 429}{6\ 381}=\frac{58\ 239}{6\ 471}=\frac{75\ 249}{8\ 361},$$

$$9=\frac{95\ 742}{10\ 638}=\frac{95\ 823}{10\ 647}=\frac{97\ 524}{10\ 836}.$$ [405]

浦田繁松氏认为，有关分数只有这些. 当然，如下面的不规则的分数就另当别论了.

$$\frac{75\,249}{08\,361}\text{[1]},\quad \frac{58\,239}{06\,471},\quad \frac{57\,429}{06\,381}.$$

浦田繁松氏认为，用从 0 到 9 的数来表示等于 99 的分数只有 1 道题：

$$99=\frac{496\,287}{5\,013}.$$

(b) 减法

$$\begin{array}{r} 987654321 \\ -\ 123456789 \\ \hline 864197532 \end{array}$$

(c) 加法

$$\begin{array}{r} 0123456789 \\ 0493827156 \\ 0617283945 \\ 0864197523 \\ 0987654312 \\ 1234567890 \\ 1358024679 \\ 1728395046 \\ +\ 2469135780 \\ \hline 9876543120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0246913578 \\ 0493827156 \\ 0617283945 \\ 0864197523 \\ 0987654312 \\ 1234567890 \\ 1358024679 \\ 1975308624 \\ +\ 2098765413 \\ \hline 9876543120 \end{array}$$

(d)乘法

$123\,456\,789\times2=246\,913\,578$,

$123\,456\,789\times4=493\,827\,156$,

$123\,456\,789\times5=617\,283\,945$,

$123\,456\,789\times7=864\,197\,523$,

① “0”号在计算中不起作用，下同。

$$123\ 456\ 789\times 8=987\ 654\ 312,$$

$$123\ 456\ 789\times 9=1\ 111\ 111\ 101.$$ [406]

(e)

$$9\times 9=1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1$$

$$999\ 999\ 999\times 999\ 999\ 999=999\ 999\ 998\ 000\ 000\ 001$$
$$=123\ 456\ 789\ 876\ 543\ 21\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1).$$

(f) 用从 1 到 9 的数作乘法计算

$12\times 483=5\ 796$，　$18\times 297=5\ 346$，

$27\times 198=5\ 346$，　$39\times 186=2\ 754$.

4×1963，　4×1738，　28×157，　48×159，　42×138

(g) 分数的乘法

$$\frac{13\ 458}{6\ 729}\times\frac{13\ 584}{6\ 792}=\frac{13\ 854}{6\ 927}\times\frac{14\ 538}{7\ 269}=\frac{15\ 384}{7\ 692}\times\frac{18\ 534}{9\ 267}$$
$$=\frac{14\ 586}{7\ 293}\times\frac{14\ 658}{7\ 329}=\frac{15\ 846}{7\ 923}\times\frac{15\ 864}{7\ 932}=\frac{18\ 546}{9\ 273}\times\frac{18\ 654}{9\ 327}$$
$$=\frac{15\ 768}{3\ 942}=\frac{17\ 568}{4\ 392}=\frac{23\ 184}{5\ 796}=\frac{31\ 824}{7\ 956}.$$

在这个分数的乘法中，各项分数都是由从 1 到 9 的数字构成. 下面的乘法也同样成立.

$$\frac{18\ 534}{9\ 267}\times\frac{17\ 469}{5\ 823},\ \frac{13\ 458}{6\ 729}\times\frac{17\ 469}{5\ 823},$$

$$\frac{13\ 458}{6\ 729}\times\frac{15\ 768}{3\ 942},\ \frac{17\ 469}{5\ 823}\times\frac{17\ 496}{5\ 832}$$

此外，下面计算中的平方、立方更有趣.

$$\frac{13\ 458}{6\ 729}\times\frac{25\ 496}{3\ 187}=\left(\frac{15\ 768}{3\ 942}\right)^2=\cdots\cdots$$

$$\frac{15\ 768}{3\ 942}\times\frac{57\ 429}{6\ 381}=\left(\frac{17\ 658}{2\ 943}\right)^2=\cdots\cdots$$

$$\frac{17\ 469}{5\ 823}\times\frac{57\ 429}{6\ 381}=\left(\frac{17\ 496}{5\ 832}\right)^3=\cdots\cdots$$

(h) 用从 1 到 9 的数字作平方数(合计 30 题)

$18\ 072^2=326\ 597\ 184$, $19\ 023^2=361\ 874\ 529$.

[407] 与这些数类似的数还有:

$11\ 826^2$, $12\ 363^2$, $12\ 543^2$, $14\ 676^2$, $15\ 681^2$,
$15\ 963^2$, $19\ 377^2$, $19\ 569^2$, $19\ 629^2$, $20\ 316^2$,
$22\ 887^2$, $23\ 019^2$, $23\ 178^2$, $23\ 439^2$, $24\ 237^2$,
$24\ 276^2$, $24\ 441^2$, $24\ 807^2$, $25\ 059^2$, $25\ 572^2$,
$25\ 941^2$, $26\ 409^2$, $26\ 733^2$, $27\ 129^2$, $27\ 273^2$,
$29\ 034^2$, $29\ 106^2$, $30\ 384^2$.

(i) 从 0 到 9 的数的乘法计算与平方数

$3\times5\ 694=17\ 082$, $3\times9\ 168=27\ 504$.

同理

$3\times8\ 169, 54\times297$, $7\times9\ 403, 4\times3\ 907$.

还有

$32\ 043^2=1\ 026\ 753\ 849$, $32\ 286^2=1\ 042\ 385\ 796$.

下面的计算也同样成立.(合计 87 题)

$33\ 144^2$, $35\ 172^2$, $39\ 147^2$, $45\ 624^2$, $55\ 446^2$,
$55\ 626^2$, $58\ 554^2$, $65\ 634^2$, $65\ 637^2$ $68\ 763^2$,
$68\ 763^2$, $83\ 919^2$, $99\ 066^2$.

(j) 与上述方法相反地,限制使用的数字,以后平方数会减少.例如,用 1,2,3,4,5,6,7,8 的 8 个数字作平方数,至今只发现了 5 道题:

$3\ 678^2=13\ 527\ 684$, $5\ 904^2=34\ 857\ 216$,
$8\ 082^2=65\ 318\ 724$, $8\ 559^2=73\ 256\ 481$,
$9\ 024^2-81\ 432\ 576$.

由偶数构成 4 位数的平方数,现在只知道 4 道题:

$68^2=4\ 624$, $78^2=6\ 084$,

$80^2=6\ 400$,　　$92^2=8\ 464$.

此外,不包含1,2,3,4,的立方数,现在只知道以下几种: [408]

$2^3=8$,　　$1\ 786^3=5\ 696\ 975\ 656$,

$19^3=6\ 859$,　　$1\ 966^3=7\ 598\ 896\ 696$,

$92^3=778\ 688$,　　$4\ 053^3=66\ 577\ 856\ 877$,

$423^3=75\ 686\ 967$,　　$4\ 235^3=75\ 955\ 677\ 875$.

(k) 等号左右由相同的数字组成的乘法计算

$3\times51=153$,　　$6\times21=126$,

$8\times473=3\ 784$,　　$9\times351=3\ 159$,

$15\times93=1\ 395$,　　$21\times87=1\ 827$,

$27\times81=2\ 187$,　　$35\times41=1\ 435$.

根据杜德尼[①](H. E. Dudeney,1857—1930)的计算,左右相同数字的乘法计算,4位数以上的有8个,其中5位数的有以下22道题.

$3\times4\ 128=12\ 384$,　　$3\times4\ 281=12\ 843$,

$3\times7\ 125=21\ 375$,　　$3\times7\ 251=21\ 753$,

$2\ 541\times6=15\ 246$,　　$651\times24=15\ 624$,

$678\times42=28\ 476$,　　$246\times51=12\ 546$,

$57\times834=47\ 538$,　　$75\times231=17\ 325$,

$624\times78=48\ 672$,　　$435\times87=37\ 845$,

$9\times7\ 461=67\ 149$,　　$72\times936=67\ 392$,

$2\times8\ 714=17\ 428$,　　$2\times8\ 741=17\ 482$,

$65\times281=18\ 265$,　　$65\times983=63\ 895$,

$4\ 973\times8=39\ 784$,　　$6\ 521\times8=52\ 168$,

$14\times926=12\ 964$,　　$86\times251=21\ 586$.

以上是只有一边为乘积的形式,两边为乘积形式的有很

---

① 杜德尼(H. E. Dudeney,1857—1930),英国人,研究各种难题,倡导益智难题,有著作《五百二十个难题》等.

多. 数字顺序为颠倒的“回文算式”① 有:

$12\times 231=132\times 21$，　　$12\times 462=264\times 21$，

$12\times 693=396\times 21$，　　$15\times 561=165\times 51$，

[409] $18\times 891=198\times 81$，　　$24\times 231=132\times 42$，

$12\times 2\,121=1\,212\times 21$，　　$132\times 2\,121=1\,212\times 231$，

$12\times 4\,032=2\,304\times 21$，　　$12\times 21\,021=12\,012\times 21$.

这些结果并不是数学中的理论性东西，而是必须经过计算后才能够得出的结果. 安部元章氏把它叫做“数的户籍调查”，他用算盘进行了各种计算，并在他的著作《数与算盘》(1942 年)和《续・数与算盘》(1943 年)中列举了许多实例.

第9节　数　之　美

(1)

$$1\times 1=1,$$
$$11\times 11=121,$$
$$111\times 111=12\,321,$$
$$1\,111\times 1\,111=1\,234\,321,$$
$$11\,111\times 11\,111=123\,454\,321,$$
$$111\,111\times 111\,111=12\,345\,654\,321,$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

(2)

$$11\times 111=1\,221,$$
$$111\times 11\,111=1\,233\,321,$$
$$1\,111\times 1\,111\,111=1\,234\,444\,321,$$
$$11\,111\times 111\,111\,111=1\,234\,555\,554\,321,$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

---

① “回文算式”是指等号两端的数字由左到右和由右到左的次序一样.

(3)

$$
\begin{aligned}
1\times9+2&=11,\\
12\times9+3&=111, \qquad [410]\\
123\times9+4&=1\ 111,\\
1\ 234\times9+5&=11\ 111,\\
12\ 345\times9+6&=111\ 111,\\
123\ 456\times9+7&=1\ 111\ 111,\\
1\ 234\ 567\times9+8&=11\ 111\ 111,\\
12\ 345\ 678\times9+9&=111\ 111\ 111,\\
123\ 456\ 789\times9+10&=1\ 111\ 111\ 111.
\end{aligned}
$$

(4)

$6^2-5^2=11$, $\qquad 11^2=121$

$56^2-55^2=111$, $\qquad 101^2=10\ 201$

$556^2-555^2=1\ 111$, $\qquad 1001^2=1\ 002\ 001$

$5\ 556^2-5\ 555^2=11\ 111$, $\qquad 10\ 001^2=100\ 020\ 001$

… … … … … $\qquad$ … … … … …

$$
\begin{aligned}
11^3&=1\ 331,\\
101^3&=1\ 030\ 301,\\
1\ 001^3&=1\ 003\ 003\ 001,\\
10\ 001^3&=1\ 000\ 300\ 030\ 001,
\end{aligned}
$$

… … …

(5)

$12\ 345\ 679\times9=111\ 111\ 111$, $\qquad 12\ 345\ 679\times3=37\ 037\ 037$,

$12\ 345\ 679\times18=222\ 222\ 222$, $\qquad 12\ 345\ 679\times6=74\ 074\ 074$,

$12\ 345\ 679\times27=333\ 333\ 333$, $\qquad 12\ 345\ 679\times12=148\ 148\ 148$,

$12\ 345\ 679\times36=444\ 444\ 444$. $\qquad 12\ 345\ 679\times8=98\ 765\ 432$. [411]

… … … …

$12\ 345\ 679\times81=999\ 999\ 999$.

(6)

$$
\begin{aligned}
9\times9+7&=88,\\
98\times9+6&=888,\\
987\times9+5&=8\ 888,
\end{aligned}
$$

$$9\ 876\times9+4=88\ 888,$$
$$98\ 765\times9+3=888\ 888,$$
$$987\ 654\times9+2=8\ 888\ 888,$$
$$9\ 876\ 543\times9+1=88\ 888\ 888,$$
$$98\ 765\ 432\times9+0=888\ 888\ 888.$$

(7)

$$1\times8+1=9,$$
$$12\times8+2=98,$$
$$123\times8+3=987,$$
$$1\ 234\times8+4=9\ 876,$$
$$12\ 345\times8+5=98\ 765,$$
$$123\ 456\times8+6=987\ 654,$$
$$1\ 234\ 567\times8+7=9\ 876\ 543,$$
$$12\ 345\ 678\times8+8=98\ 765\ 432,$$
$$123\ 456\ 789\times9+9=987\ 654\ 321.$$

(8)

$$9\times9=81,$$
$$99\times99=9\ 801,$$
$$999\times999=998\ 001,$$
$$9\ 999\times9\ 999=99\ 980\ 001,$$
$$99\ 999\times99\ 999=9\ 999\ 800\ 001,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$9^3=729,$$
[412] $$99^3=970\ 299,$$
$$999^3=997\ 002\ 999,$$
$$9\ 999^3=999\ 700\ 029\ 999,$$
$$99\ 999^3=999\ 970\ 000\ 299\ 999,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$9^4=6\ 561$$

$$99^4=96\ 059\ 601$$
$$999^4=996\ 005\ 946\ 001$$
$$9\ 999^4=9\ 996\ 000\ 599\ 960\ 001$$
$$99\ 999^4=9\ 999\ 600\ 005\ 999\ 960\ 001$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

(9)

$$9\times 7=63,$$
$$99\times 77=7\ 623,$$
$$999\times 777-776\ 223,$$
$$9\ 999\times 7\ 777=77\ 762\ 223,$$
$$99\ 999\times 77\ 777=7\ 777\ 622\ 223,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$9\times 9=81,$$
$$99\times 89=8\ 811,$$
$$999\times 889=888\ 111,$$
$$9\ 999\times 8\ 889=88\ 881\ 111,$$
$$99\ 999\times 88\ 889=8\ 888\ 811\ 111,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

(10)

$$1\times 9+1\times 2=11,$$
$$12\times 18+2\times 3=222,$$
$$123\times 27+3\times 4=3\ 333,$$
$$1\ 234\times 36+4\times 5=44\ 444,$$
$$12\ 345\times 45+5\times 6=555\ 555,$$
$$123\ 456\times 54+6\times 7=6\ 666\ 666,$$
$$1\ 234\ 567\times 63+7\times 8=77\ 777\ 777,$$
$$12\ 345\ 678\times 72+8\times 9=888\ 888\ 888,$$
$$123\ 456\ 789\times 81+9\times 10-9\ 999\ 999\ 999.$$

[413]

(11)

$$5^2=25,$$

$$25^2=625,$$
$$625^2=390\ 625,$$
$$90\ 625^2=8\ 212\ 890\ 625,$$
$$890\ 625^2=793\ 212\ 890\ 625,$$
$$2\ 890\ 625^2=8\ 355\ 712\ 890\ 625,$$
$$12\ 890\ 625^2=166\ 168\ 212\ 890\ 625,$$
$$212\ 890\ 625^2=45\ 322\ 418\ 212\ 890\ 625,$$
$$8\ 212\ 890\ 625^2=67\ 451\ 572\ 418\ 212\ 890\ 625,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$6^2=36,$$
$$76^2=5\ 776,$$
$$376^2=141\ 376,$$
$$9\ 376^2=87\ 909\ 376,$$
$$109\ 376^2=11\ 963\ 109\ 376,$$
$$7\ 109\ 376^2=50\ 543\ 227\ 109\ 376,$$
$$87\ 109\ 376^2=7\ 588\ 043\ 387\ 109\ 376,$$
$$787\ 109\ 376^2=619\ 541\ 169\ 787\ 109\ 376,$$
$$1\ 787\ 109\ 376^2=3\ 193\ 759\ 921\ 787\ 109\ 376,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

(12)

$$4^2=16,$$
$$34^2=1\ 156,$$
$$334^2=111\ 556,$$
$$3\ 334^2=11\ 115\ 556,$$
$$33\ 334^2=1\ 111\ 155\ 556,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$62^2=3\ 844,$$
$$662^2=438\ 244,$$
$$6\ 662^2=44\ 382\ 244,$$
$$66\ 662^2=4\ 443\ 822\ 244,$$

$$666\ 662^2=444\ 438\ 222\ 244,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$ [414]

$$7^2=49,$$

$$67^2=4\ 489,$$

$$667^2=444\ 889,$$

$$6\ 667^2=44\ 448\ 889,$$

$$66\ 667^2=4\ 444\ 488\ 889.$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$8^2=64,$$

$$98^2=9\ 604,$$

$$998^2=996\ 004,$$

$$9\ 998^2=99\ 960\ 004,$$

$$99\ 998^2=9\ 999\ 600\ 004,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$4\ 901^2=24\ 019\ 801,$$

$$499\ 001^2=249\ 001\ 998\ 001,$$

$$49\ 990\ 001^2=2\ 499\ 000\ 199\ 980\ 001$$

$$4999900001^2=24\ 999\ 000\ 019\ 999\ 800\ 001.$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

(13)

$$1\times7+1=8,$$

$$12\times7+2=86,$$

$$123\times7+3=864,$$

$$1\ 234\times7+4=8\ 642,$$

$$12\ 345\times7+5=86\ 420.$$

$$1\times11+2=13,$$

$$12\times11+3=135,$$

$$123\times11+4=1\ 357,$$

$$1\ 234\times11+5=13\ 579.$$

(14)

$$1+2=3,$$
$$4+5+6=7+8,$$
$$9+10+11+12=13+14+15,$$
$$16+17+18+19+20=21+22+23+24,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$121=29+92,$$
$$1\ 111=209+902,$$
$$11\ 011=2\ 009+9\ 002,$$
[415] $$12\ 221=2\ 299+9\ 922.$$

(15)

$$110\ 011=20\ 009+90\ 002,$$
$$121\ 121=22\ 099+99\ 022,$$
$$1\ 100\ 011=200\ 009+900\ 002,$$
$$1\ 112\ 111=202\ 909+909\ 202,$$
$$1\ 210\ 121=220\ 099+990\ 022,$$
$$1\ 222\ 221=222\ 999+999\ 222,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

(16)

			99999
		99999	99999
	99999	99999	99999
99999	99999	99999	99999
99999	99999	99999	99999
199998	299997	399996	499995

(17)

$$3^2+6^2=45,$$
$$33^2+66^2=5\ 445,$$
$$333^2+666^2=554\ 445,$$
$$3\ 333^2+6\ 666^2=55\ 544\ 445,$$

$$33\ 333^2+66\ 666^2=5\ 555\ 444\ 445.$$

… … … …

$$3^2+9^2=90$$

$$33^2+99^2=10\ 890,$$

$$333^2+999^2=1\ 108\ 890,$$

$$3\ 333^2+9\ 999^2=111\ 088\ 890,$$

$$33\ 333^2+99\ 999^2=11\ 110\ 888\ 890,$$

… … … … [416]

$$6^2+9^2=117,$$

$$66^2+99^2=14\ 157,$$

$$666^2+999^2=1\ 441\ 557,$$

$$6\ 666^2+9\ 999^2=144\ 415\ 557,$$

$$66\ 666^2+99\ 999^2=14\ 444\ 155\ 557,$$

… … … …

$$3^2+6^2+9^2=126,$$

$$33^2+66^2+99^2=15\ 246,$$

$$333^2+666^2+999^2=1\ 552\ 446,$$

$$3\ 333^2+6\ 666^2+9\ 999^2=155\ 534\ 446.$$

… … … …

(18)

$$3\times 9+6=33,$$

$$33\times 99+66=3\ 333,$$

$$333\times 999+666=666\ 666,$$

$$3\ 333\times 9\ 999+6\ 666=33\ 333\ 333,$$

… … … …

$$3\times 9+39=66,$$

$$33\times 99+3\ 399=6\ 666.$$

$$333\times 999+333\ 999=666\ 666,$$

$$3\ 333\times 9\ 999+33\ 339\ 999=66\ 666\ 666,$$

… … … …

(19)

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2,$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2,$$
$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2,$$

[417] … … … …

$$3^3+4^3+5^3=6^3,$$
$$11^3+12^3+13^3+14^3=20^3,$$
$$6^3+7^3+8^3+\cdots+68^3+69^3=180^3,$$
$$34^3+35^3+36^3+\cdots+157^3+158^3=540^3,$$
$$1\,134^3+1\,135^3+1\,136^3+\cdots+2\,132^3+2\,133^3=16\,830^3,$$

… … … …

$$\begin{aligned}&1+8+10+15+20+21+27+30\\=&2+7+9+16+19+22+28+29\\=&3+6+12+13+18+23+25+32\\=&4+5+11+14+17+24+26+31,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&1^2+8^2+10^2+15^2+20^2+21^2+27^2+30^2\\=&2^2+7^2+9^2+16^2+19^2+22^2+28^2+29^2\\=&3^2+6^2+12^2+13^2+18^2+23^2+25^2+32^2\\=&4^2+5^2+11^2+14^2+17^2+24^2+26^2+31^2.\end{aligned}$$

(20)

$$\begin{cases}3=1+2\\6=1+2+3\\10=1+2+3+4\\\cdots\cdots\end{cases}\qquad\begin{cases}3^2=1^3+2^3\\6^2=1^3+2^3+3^3\\10^2=1^3+2^3+3^3+4^3\\\cdots\cdots\end{cases}$$

$$\begin{cases}1^2=1\\2^2=1+3\\3^2=1+3+5\\4^2=1+3+5+7\\\cdots\cdots\end{cases}\qquad\begin{cases}1^3=1\\2^3=3+5\\3^3=7+9+11\\4^3=13+15+17+19\\\cdots\cdots\end{cases}$$

$$\begin{cases} 1^4=1 \\ 2^4=7+9 \\ 3^4=25+27+29 \\ 4^4=61+63+65+67 \\ \cdots\cdots \end{cases} \qquad \begin{cases} 1^5=1 \\ 2^5=15+17 \\ 3^5=79+81+83 \\ 4^5=253+255+257+259 \\ \cdots\cdots \end{cases}$$ [418]

(21)

$$455=(24\times19)-1$$

$$\begin{aligned} &455=455\times1 && 455+1=24\times19 \\ &455=35\times13 && 35+13=24\times2 \\ &455=91\times5 && 91+5=24\times4 \\ &455=65\times7 && 65+7=24\times3 \end{aligned}$$

$$143\times(352\times7)=143\times2\ 464=352\ 352,$$

$$143\times7\times352=1\ 001\times352=1\ 000\times352+352.$$

(22)

$$\begin{cases} 56-45=11, \\ 56^2-45^2=1\ 111. \end{cases} \qquad \begin{cases} 67-34=33, \\ 67^2-34^2=3\ 333. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 78-23=55, \\ 78^2-23^2=5\ 555. \end{cases} \qquad \begin{cases} 89-12=77, \\ 89^2-12^2=7\ 777. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100-1=99, \\ 100^2-1^2=9\ 999. \end{cases}$$

(23)

$$\begin{cases} 102^2=10\ 404, \\ 120^2=14\ 400, \\ 201^2=40\ 401, \\ 210^2=44\ 100. \end{cases} \qquad \begin{cases} 103^2=10\ 609, \\ 130^2=16\ 900, \\ 301^2=90\ 601, \\ 310^2=96\ 100, \\ 247^2=61\ 009. \end{cases}$$

(24)

$$\begin{cases} 11^2=121, \\ 22^2=484. \end{cases} \qquad \begin{cases} 101^2=10\ 201, \\ 202^2=40\ 804. \end{cases} \qquad \begin{cases} 111^2=12\ 321, \\ 121^2=14\ 641. \end{cases}$$

(25)

$$\begin{cases}12^2=144,\\21^2=441.\end{cases}\qquad\begin{cases}33^2=1\ 089,\\99^2=9\ 801.\end{cases}$$

[419] $$\begin{cases}122^2=14\ 884,\\221^2=48\ 841.\end{cases}\qquad\begin{cases}113^2=12\ 769,\\311^2=96\ 721.\end{cases}$$

(26)

$$\begin{cases}28+59+61=31+49+68,\\28^2+58^2+61^2=31^2+49^2+68^2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}17+59+68=28+37+79,\\17^2+59^2+68^2=28^2+37^2+79^2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}4+4=1+1+1+5,\\4^3+4^3=1^3+1^3+1^3+5^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}25+25=9+9+1+31,\\25^3+25^3=9^3+9^3+1^3+31^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\ 156+1\ 156=25+25+961+1\ 301,\\1\ 156^3+1\ 156^3=25^3+25^3+961^3+1\ 301^3.\end{cases}$$

(27)

$$\begin{cases}15+42+48=16+35+54=21+24+60,\\15\times42\times48=16\times35\times54=21\times24\times60.\end{cases}$$

$$\begin{cases}9+20+20=12+12+25=7^2,\\9\times20\times20=12\times12\times25=60^2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2+4+15=(-1)+10+12,\\2^2+4^2+15^2=(-1)^2+10^2+12^2,\\-(2\times4\times15)=(-1)\times10\times12.\end{cases}$$

(28)

$$\begin{cases}2\times3=1+1+4=1^2+1^2+2^2,\\2\times3^2=1^2+1^2+4^2=1^4+1^4+2^4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\times7^2=3^2+5^2+8^2,\\2\times7^4=3^4+5^4+8^4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}3^2+73^2+3\times67^2=87^2+4\times53^2,\\3^4+73^4+3\times67^4=87^4+4\times53^4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\times3^3=3^2+3^2+6^2,\\2\times3^6=3^4+3^4+6^4.\end{cases}$$

(29)

$3^2+3^2+6^2=3\times3\times6$，$1\,001\,001(1\,001+1)=1\,001^3+1^3$.

(30)

$$\begin{cases}218^2+241^2=120^2+143^2+266^2,\\218^4+241^4=120^4+143^4+266^4.\end{cases}\quad\begin{cases}4^2=1+3+5+7,\\4^3=13+15+17+19.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\times21^2=9^2+15^2+24^2,\\2\times21^4=9^4+15^4+24^4.\end{cases}$$ [420]

(31)

$$\begin{cases}1\,334\,668(1\,334+668)=1\,334^3+668^3,\\334\,668(334+668)=334^3+668^3,\\133\,366(1\,333+667)=1\,333^3+667^3,\\333\,667(333+667)=333^3+667^3.\end{cases}$$

(32)

$$\begin{cases}111(11+1)=11^3+1^3,\\147(14+7)=14^3+7^3,\\148(14+8)=14^3+8^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}13\,377(133+77)=133^3+77^3,\\4\,477(44+77)=44^3+77^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}12\,096(120+96)=120^3+96^3,\\7\,696(76+96)=76^3+96^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}12\,636(126+36)=126^3+36^3,\\1\,036(10+36)=10^3+36^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}12\,025(120+25)=120^3+25^3,\\525(5+25)=5^3+25^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}11\,011(110+11)=110^3+11^3,\\111(1+11)=1^3+11^3.\end{cases}$$

(33)

$$\begin{cases}100+100=9+9+61+121,\\100^3+100^3=9^3+9^3+61^3+121^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}169+169=9+9+121+199,\\169^3+169^3=9^3+9^3+121^3+199^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}841+841=25+25+671+961,\\841^3+841^3=25^3+25^3+671^3+961^3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\ 156+1\ 156=25+25+961+1\ 301,\\1\ 156^3+1\ 156^3=25^3+25^3+961^3+1\ 301^3.\end{cases}$$

(34)

$$\begin{cases}2\cdot 21^2+3(7^2+7^2+14^2)=9^2+15^2+24^2\\ \qquad +3(2^2+11^2+13^2),\\ 2\cdot 21^4+3^2(7^4+7^4+14^4)=9^4+15^4+24^4\\ \qquad +3^2(2^4+11^4+13^4),\\ 2\cdot 21^6+3^3(7^6+7^6+14^6)=9^6+15^6+24^6\\ \qquad +3^3(2^6+11^6+13^6),\\ 2\cdot 21^8+3^4(7^8+7^8+14^8)=9^8+15^8+24^8\\ \qquad +3^4(2^8+11^8+13^8),\\ 2\cdot 21^{10}+3^5(7^{10}+7^{10}+14^{10})=9^{10}+15^{10}+24^{10}\\ \qquad +3^5(2^{10}+11^{10}+13^{10}).\end{cases}$$

[421]

(35)

$$\begin{cases}(-27)+(-29)+17+39=(-1)+(-3)+43+(-39),\\ (-27)^2+(-29)^2+17^2+39^2=(-1)^2+(-3)^2+43^2\\ \qquad +(-39)^2,\\ (-27)^3+(-29)^3+17^3+39^3=(-1)^3+(-3)^3+43^3\\ \qquad +(-39)^3,\\ (-27)^5+(-29)^5+17^5+35^5=(-1)^5+(-3)^5+43^5\\ \qquad +(-39)^5,\\ (-27)^2+(-29)^2+17^2=(-1)^2+(-3)^2+43^2.\end{cases}$$

(36)

$$\begin{cases} 7^2+7^2+14^2=2^2+11^2+13^2, \\ 7^4+7^4+14^4=2^4+11^4+13^4. \end{cases}$$

(37)

$$33+1\,463+1\,474+(-971)+118+184$$
$$=583+649+1\,738+(-707)+(-696)+734,$$
$$33^2+1\,463^2+1\,474^2+(-971)^2+118^2+184^2$$
$$=583^2+649^2+1\,738^2+(-707)^2+(-696)^2+734^2,$$
$$33^3+1\,463^3+1\,474^3+(-971)^3+118^3+184^3$$
$$=583^3+649^3+1\,738^3+(-707)^3+(-696)^3+734^3,$$
$$33^4+1\,463^4+1\,474^4+(-971)^4+118^4+184^4$$
$$=583^4+649^4+1\,738^4+(-707)^4+(-696)^4+734^4.$$
$$1463^4+1474^4=649^4+1738^4.$$

(38)

$$\frac{26}{65}=\frac{2}{5},\quad \frac{266}{665}=\frac{2}{5},\quad \frac{2666}{6665}=\frac{2}{5},\cdots$$
$$\frac{16}{64}=\frac{1}{4},\quad \frac{166}{664}=\frac{1}{4},\quad \frac{1666}{6664}=\frac{1}{4},\cdots$$

(39)

$$\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}},\quad \sqrt{12\frac{12}{143}}=12\sqrt{\frac{12}{143}},$$
$$\sqrt{20\frac{20}{399}}=20\sqrt{\frac{20}{399}},\quad \sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}},$$ [422]
$$\sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}},\quad \sqrt[4]{4\frac{4}{255}}=4\sqrt[4]{\frac{4}{255}},\quad \sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}.$$

(40)

$$567=\sqrt{321\,489},\quad 854=\sqrt{729\,316},$$
$$2=\sqrt{4}=\sqrt{\frac{3\,156}{789}},\quad 2=\sqrt{4}=\sqrt{\frac{3\,516}{879}},\quad 2=\sqrt{\frac{36}{9}}=\sqrt{\frac{740}{185}},$$

$$2=\sqrt{\frac{76}{19}}=\sqrt{\frac{340}{85}},\quad 3=\sqrt{\frac{54}{6}}=\sqrt{\frac{729}{81}},\quad 7=\sqrt{49}=\sqrt{\frac{1\,568}{32}},$$

……………………………

	a	b	c	d
a	1	9	5	6
b	12	11	16	8
c	4	3	15	7
d	2	10	13	14

在上表中,下面的等式成立

$$a-b+c-d=\pm 9.$$

(阿部乐方)

19	56	927	954
908	903	70	75
942	845	138	31
87	152	821	896

列、行、对角线上的数的和都等于 1956.(浦田繁松)

$$\left(\frac{2\,498\,349\,087}{32}\right)^3-\left(\frac{2\,498\,316\,319}{32}\right)^3$$
$$=\left(\frac{2\,498\,349\,087}{1\,957}\right)^3+\left(\frac{499\,665\,406}{1\,957}\right)^3.$$

[423] (境新)

本书的利用及其希望

1. 数学游戏在日本国外

在多数情况下都把本书的内容看作数学游戏，但数学游戏这个词有语言上的毛病. 在英国、法国叫做 recreation, récréation, curiosity, amusement, 在德国用 Unterhaltungen, Lustige, Merwürdige, Spiele 等词来表示，在日本还没有出现恰当的词. 在江户时代的《求笑算法》(田中由真)、《勘者御伽双纸》(中根彦循)、《算法童子问》(村井中渐)、明治时代的《算法玉手箱》(福田理轩)等书中出现了相关的内容.

但是，我们还是使用了数学游戏这个词. 数学游戏的著作，早在英国的阿鲁康(735—804)和意大利的斐波那契在时(1200年左右)开始出现的. 法国17世纪初出版的巴舍的《起诉问题》(1612年)是专门的数学游戏书. 该著作被出版过多次，现在也能找到它. 自巴舍以来，在西方出现了很多类似的文献.

W. Ahrens 的《Mathematische Unterhaltungen und Spiele》(Ⅰ，Ⅱ第三版，1921年)的后面列举了从阿鲁康到1918年间的762部文献. 其中包括了杂志上发表的文献和纵横图等内容.

最近，波尔的著作(见文献)从1892年的第一版到1939年的第十一版，每次都修订并增加了新的内容. 前面介绍的阿廉斯的著作也是从1909年的第一版到1921年之间三次被修订出版. 杜德尼的著作比这两部著作更通俗易懂一些，该著作内容丰富而且非常普及. 在法国，弗利和鲁卡斯的书作为古典著作，曾

[424] 经被广泛流传过.

比利时有克列其克的名著,作者应美国邀请作了关于数学游戏的讲座.最近在美国和法国出版了他的数学讲义.最近出版的德国的利茨曼的著作与战前的内容完全不同了.

正因为这样,我委托高木茂男氏列举了数学游戏的文献.

特别想告知读者的是,正如后面列举的文献[①]中所看到的那样,我从正式出版的文献直至自家出版的文献都给列举出来了.这是为数学游戏研究所做的努力.

2. 教学中的利用

由本书"数学游戏的文献"中可见,国外数学游戏著作的出版相当发达,而且有生命力.波尔的著作,在 50 年间被修订过 10 次.被称为数学教育的双轮之一轮.

在日本,宽永 4 年(1627 年)开始出版的吉田光由的《尘劫记》是数学游戏(一般的数学教育)的标准著作.从宽永 4 年到明治年间的 250 年期间,出版过有"尘劫"二字的书 400 余种.由于《尘劫记》是用算盘的方法说明,所以,自然地遭到了被废止的厄运.

从文献集中看出,明治、大正到昭和期间,这方面的书减少了,但是适应一般要求的书多起来了.

我在东北大学和林鹤一、藤原松三郎两位老师一起工作 20 多年期间,利用了他们收集的几万种文献.我一直想着从这些文献中挖掘和介绍对日本的数学教育有益的材料,这是我的义务.担负这个责任本身并不是轻松的事情.幸运的是,在与浦田繁松氏的交谈中,得到了他的教诲,这样,才能够见到了这本书的出版.

正如从外国的例子中看到的那样,这类著作中出现一些文

① 译文参考了原文中"补充"内容,没有单独翻译.

字脱落或错误是不可避免的.我希望读者引用时做详细的调查为好.在本书的校正中也发现了两三个不完美的地方,所以本书后面附加了这些内容. [425]

3. 本书的完成

本书内容的覆盖面相当广泛,所以回避了每次都要列举出处的麻烦.书的后面列举了数学游戏的文献,在西方数学史方面参考了以下文献.

M. Cantor, Vorlesungen uber Geschichts der Mathematik, Ⅰ-Ⅳ, 1907.

M. Mric, Histoire des sciences mathematiques et physiques, 1883.

D. E. Smith, History of mathematics, Ⅰ, Ⅱ, 1925.

A. De Morgan, A Budent of paradoxes, Ⅰ, Ⅱ, 1928.

在西方的文献中往往出现学者的生卒年代不同的情况,所以我以史密斯的著作为标准.

在中国文献中,最近出版了战前版的修订本:

李俨,《中算史论丛》,第1集--第5集,1953—1955.

李俨,《中国算学史》,1955年.

李俨,《中国古代数学史料》,1954年.

利用的日本出版物有:

泽田吾一,《日本数学史讲话》,1928年.

《林鹤一博士和算研究集录》上下,1937年.

日本学士院编,《明治前日本数学史》第1卷,1954;第2卷,1956年.

三上义夫留下了关于这方面研究的很多论文,这些论文发表在我们无法找到的杂志上,这是一件遗憾的事.此外,以下的书在查阅资料时非常方便:

小高吉三郎,《日本的游戏》,1943年.

神宫司厅藏版,《古事类苑》游戏部,方技部,1909 年.

本书中的引文,是从我个人藏书和东北大学所藏原著中直接引用的.引文忠实了原文,没有改变原著中的日语假名,只把
[426] 汉字改成现代汉字.

理解引文非常困难,按照古典全集本,除了已经广泛流传的文献以外没有更改.因为多数读者无法找到原著,所以只注意这些引文就可以了.另外,对古人的苦心,也许有人的解释和我不同.

最后,说明一下古书中的纪年问题,在早期的日本和中国的古书中,同一本书也存在纪年不一致的问题.古书中普遍存在序文、跋文的纪年和书的正式出版年代不一致的现象.有的相差 5 年,甚至相差 10 年.在争论发明和发现的优先权的时候,采用该书的最早的纪年是最有利的,在历史性的记述中一般采用出版年代.我就服从了这个惯例.我的手头有江户时代出版的科学书 1 600 多种,我利用这些书的时候准备了它们的序文、跋文和出版年代的详细的调查记录.

【6--7 页】[1]约哈斯的妙算

波尔和阿廉斯的书中记述了约哈斯问题的最早的形式.(浦田繁松)

"41 个犹太人从罗马人手中逃脱后躲到山中,但最终觉得难于逃脱以后作出了集体自杀的决定.然而,其中的叫约哈斯的一个人和另外一个人心里反对自杀,但现在不得不服从这样的决定,所以约哈斯对伙伴们提建议说:'现在我们各自自杀还不如按照一定顺序互相杀掉为好.'大家赞同后排成圆圈,从某一位开始连续地杀掉第三个人,最后留下的一人要自杀.于是聪明的约哈斯和另外一位不想自杀者站在第 16 位和第 31 位上,最

① 这是日文原著的页码,下同.

后逃脱了死亡，趁着夜色逃跑了.” [427]

【42 页】诸葛孔明之阵

阵的总人数应该是 $8^8=16\ 777\ 216$ 人，答案中人数比这个数多.《算法统宗》的原文也是这样，而作者程大位指出：此问题在吴敬（信民）的《九章详注类比大全》（1450 年）中就有，但叫马杰的人把数字改错了.但程大位也没有纠正这个错误.当时的中国数学史中有很多不清楚之点.（平山谛）

【230 页】中国的七巧板

丢丢涅的著作中说：英语里把七巧板叫做 Tangram. 4 000 年前在中国有一位叫 Tan（汉字不清楚）的人①，将（230 页的）正方形分成 7 个图形，所以把七巧板叫做 Tangram. 这样，大约在 1 900 年左右，英国人和美国人使用这些图形制作了 10 多种新的图形.由此可见，七巧板是从中国传播到西方的，但也有人认为是西方人独立创造的.（浦田繁松）

【168—170】汉数字的起源

《说文解字》（许慎，100 年）中说：五是“阴阳在天地间交午也”，十是“一为东西，丨为南北，则四方中央备矣”，这样的解说是玄妙的，但是当作现在的解释是不能让人满意的.我不同意这种解释，我认为汉数字的起源只不过是起源于手指计数.我们在孩提时代，数数时一定要数手指的.当右手指不足时接着数左手指，进而可以数脚趾.据说，西非的某一民族使用具有下面意义的数词：

1，曲折拇指

2，折食指

3，折中指

4，折其次的一指（无名指） [428]

---

① 现在尚未查到中国在 4 000 年前有七巧板的记载.也不知道当时有个叫 Tan 的中国人研究过七巧板.

5,折小指

6,小指加上一指

7,小指加上二指

8,小指加上三指

9,几乎全体指

10,指全部指

100,指的指倍

1 000,指的指倍的指倍

其他未开化人群的数词,大致都用手指来表示.

在汉数字被创造的时候,用手指计数的方法就成为了象形对象,这是自然的事情.被称之为比例之古形的苏州码①(俗用数字)中,很多来源于手指计数的东西就是一个旁证.

把一、二、三竖写为丨、‖、‖|的基本形式,肯定是手指计数中的手指的数.它演变成如一、二、三的横写形式.

四这个字有些问题.必须根据《说文解字》中的"像四分之形"来判定.四等分苹果或梨时,用菜刀按十字形切开.用形状来表示就是⊗.稍微变形后成为><的形状,便产生了四.苏州码的4为×,这也是一个佐证.

似乎容易理解但却不易理解的是五.如沙漏同样让人感觉到㐅的形式不易理解,但与X(四)有密切的联系②.

中国人用手指计数的方法表示6时,伸出拇指和小指,弯曲其余三指.亣(六)明显地表示这个形状③.

表示7的时候,伸出拇指、食指和中指,再弯曲其余两只指.用⼻(七)来表示它.

---

① "苏州码"到宋代才出现,主要是为了书写的方便,与手指数数无关.

② 最早的甲骨文中的4写作亖,周初开始有四.

③ 这种用手指计数的方法,目前在中国民间还通行.

表示 8 的时候，把拇指和食指如八的形状伸展就可以了．八这个数字的形状没有怀疑的余地，让人不可思议的是注意到这个现象的人只有八木奘三郎氏（《满蒙之文化》第 15 册，1921 年）． [429]

九是最难理解的一个字．中国人表示 9 的时候，只把食指像芋虫那样弯曲，把其余四指向手掌内侧弯曲就可以了．与食指的弯曲是不完全一致的，但（九）应该是它的象形字．

十这个字从丨开始的数，在丨的下边写‖来表示十二，于是为了与丨（一）加以区别，在丨的正中间加了一个黑点作了ᚋ，便产生了十．八木奘三郎氏认为这是结绳文字的遗留痕迹．

可以认为，在上面从 1 到 10 的数中除 4 和 5 以外，都是从中国人的手指计数中发展而来的．在汉字被制定的时代，是否使用了与现在相同的手指计数方法是一个引起人们注意的问题．我们可以认为，手指计数的原始技巧，即使是经过了漫长的岁月也不会有大的变化．走在现在经济领域前头的证券交易中也不是经常使用像我们小时候的手指计数方法吗？（浦田繁松） [430]

素 数 表 2~2741

2	179	419	661	947	1 229	1 523	1 823	2 131	2 437
3	181	421	673	953	231	531	831	137	441
5	191	431	677	967	237	543	847	141	447
7	193	433	683	971	249	549	861	143	459
11	197	439	691	977	259	553	867	153	467
13	199	443	701	983	277	559	871	161	473
17	211	449	709	991	279	567	873	179	477
19	223	457	719	997	283	571	877	203	503
23	227	461	727	1 009	289	579	879	207	521
29	229	463	733	13	291	583	889	213	531
31	233	467	739	19	297	597	901	221	539
37	239	479	743	21	301	601	907	237	543
41	241	487	751	31	303	607	913	239	549
43	251	491	757	33	307	609	931	243	551
47	257	499	761	39	319	613	933	251	557
53	263	503	769	49	321	619	949	267	579
59	269	509	773	51	327	621	951	269	591
61	271	521	787	61	361	627	973	273	593
67	277	523	797	63	367	637	979	281	609
71	281	541	809	69	373	657	987	287	617
73	283	547	811	87	381	663	993	293	621
79	293	557	821	91	399	667	997	297	633
83	307	563	823	93	409	669	999	309	647
89	311	569	827	97	423	693	2 003	311	657
97	313	571	829	103	427	697	11	333	659
101	317	577	839	109	429	699	17	339	663
103	331	587	853	117	433	709	27	341	671
107	337	593	857	123	439	721	29	347	677
109	347	599	859	129	447	723	39	351	683
113	349	601	863	151	451	733	53	357	687
127	353	607	877	153	453	741	63	371	689
131	359	613	881	163	459	747	69	377	693
137	367	617	883	171	471	753	81	381	699
139	373	619	887	181	481	759	83	383	707
149	379	631	907	187	483	777	87	389	711
151	383	641	911	193	487	783	89	393	713
157	389	643	919	201	489	787	99	399	719
163	397	647	929	213	493	789	111	411	729
167	401	653	937	217	499	801	113	417	731
173	409	659	941	223	511	811	129	423	741

素 数 表 2749～6133

2 749	3 083	3 433	3 733	4 073	4 421	4 759	5 099	5 449	5 801
753	89	449	739	79	423	783	101	471	807
767	109	457	761	91	441	787	107	477	813
777	119	461	767	93	447	789	113	479	821
789	121	463	769	99	451	793	119	483	827
791	137	467	779	111	457	799	147	501	839
797	163	469	793	127	463	801	153	503	843
801	167	491	797	129	481	813	167	507	849
803	169	499	803	133	483	817	171	519	851
819	181	511	821	139	493	831	179	521	857
833	187	517	823	153	507	861	189	527	861
837	191	527	833	157	513	871	197	531	867
843	203	529	847	159	517	877	209	557	869
851	209	533	851	177	519	889	227	563	879
857	217	539	853	201	523	903	231	569	881
861	221	541	863	211	547	909	233	573	897
879	229	547	877	217	549	919	237	581	903
887	251	557	881	219	561	931	261	591	923
897	253	559	889	229	567	933	273	623	927
903	257	571	907	231	583	937	279	639	939
909	259	581	911	241	591	943	281	641	953
917	271	583	917	243	597	951	297	647	981
927	299	593	919	253	603	957	303	651	987
939	301	607	923	259	621	967	309	653	6 007
953	307	613	929	261	637	969	323	657	11
957	313	617	931	271	639	973	333	659	29
963	319	623	943	273	643	987	347	669	37
969	323	631	947	283	649	993	351	683	43
971	329	637	967	289	651	999	381	689	47
999	331	643	989	297	657	5 003	387	693	53
3 001	343	659	4 001	327	663	9	393	701	67
11	347	671	3	337	673	11	399	711	73
19	359	673	7	339	679	21	407	717	79
23	361	677	13	349	691	23	413	737	89
37	371	691	19	357	703	39	417	741	91
41	373	697	21	363	721	51	419	743	101
49	389	701	27	373	723	59	431	749	113
61	391	709	49	391	729	77	437	779	121
67	407	719	51	397	733	81	441	783	131
79	413	727	57	409	751	87	443	791	133

素 数 表 6143～9733

6 143	6 481	6 841	7 211	7 573	7 927	8 293	8 681	9 013	9 391
151	491	857	213	577	933	297	689	29	397
163	521	863	219	583	937	311	693	41	403
173	529	869	229	589	949	317	699	43	413
197	547	871	237	591	951	329	707	49	419
199	551	883	243	603	963	353	713	59	421
203	553	899	247	607	993	363	719	67	431
211	563	907	253	621	8 009	369	731	91	433
217	569	911	283	639	11	377	737	103	437
221	571	917	297	643	17	387	741	109	439
229	577	947	307	649	39	389	747	127	461
247	581	949	309	669	53	419	753	133	463
257	599	959	321	673	59	423	761	137	467
263	607	961	331	681	69	429	779	151	473
269	619	967	333	687	81	431	783	157	479
271	637	971	349	691	87	443	803	161	491
277	653	977	351	699	89	447	807	173	497
287	659	983	369	703	93	461	819	181	511
299	661	991	393	717	101	467	821	187	521
301	673	997	411	723	111	501	831	199	533
311	679	7 001	417	727	117	513	837	203	539
317	689	13	433	741	123	521	839	209	547
323	691	19	451	753	147	527	849	221	551
329	701	27	457	757	161	537	861	227	587
337	703	39	459	759	167	539	863	239	601
343	709	43	477	789	171	543	867	241	613
353	719	57	481	793	179	563	887	257	619
359	733	69	487	817	191	573	893	277	623
361	737	79	489	823	209	581	923	281	629
367	761	103	499	829	219	597	929	283	631
373	763	109	507	841	221	599	933	293	643
379	779	121	517	853	231	609	941	311	649
389	781	127	523	867	233	623	951	319	661
397	791	129	529	873	237	627	963	323	677
421	793	151	537	877	243	629	969	337	679
427	803	159	541	879	263	641	971	341	689
449	823	177	547	883	269	647	999	343	697
451	827	187	549	901	273	663	9 001	349	719
469	829	193	559	907	287	669	7	371	721
473	833	207	561	919	291	677	11	377	733

素 数 表 9739～13499

9 739	10 103	10 463	10 861	11 257	11 677	12 037	12 409	12 743	13 121
743	111	477	867	261	681	41	413	757	127
749	133	487	883	273	689	43	421	763	147
767	139	499	889	279	699	49	433	781	151
769	141	501	891	287	701	71	437	791	159
781	151	513	903	299	717	73	451	799	163
787	159	529	909	311	719	97	457	809	171
791	163	531	937	317	731	101	473	821	177
803	169	559	939	321	743	107	479	823	183
811	177	567	949	329	777	109	487	829	187
817	181	589	957	351	779	113	491	841	217
829	193	597	973	353	783	119	497	853	219
833	211	601	979	369	789	143	503	889	229
839	223	607	987	383	801	149	511	893	241
851	243	613	993	393	807	157	517	899	249
857	247	627	11 003	399	813	161	527	907	259
859	253	631	27	411	821	163	539	911	267
871	259	639	47	423	827	197	541	917	291
883	267	651	57	437	831	203	547	919	297
887	271	657	59	443	833	211	553	923	309
901	273	663	69	447	839	227	569	941	313
907	289	667	71	467	863	239	577	953	327
923	301	687	83	471	867	241	583	959	331
929	303	691	87	483	887	251	589	967	337
931	313	709	93	489	897	253	601	973	339
941	321	711	113	491	903	263	611	979	367
949	331	723	117	497	909	269	613	983	381
967	333	729	119	503	923	277	619	13 001	397
973	337	733	131	519	927	281	637	3	399
10 007	343	739	149	527	933	289	641	7	411
9	357	753	159	549	939	301	647	9	417
37	369	771	161	551	941	323	653	33	421
39	391	781	171	579	953	329	659	37	441
61	399	789	173	587	959	343	671	43	451
67	427	799	177	593	969	347	689	49	457
69	429	831	197	597	971	373	697	63	463
79	433	837	213	617	981	377	703	93	469
91	453	847	239	621	987	379	713	99	477
93	457	853	243	633	12 007	391	721	103	487
99	459	859	251	657	11	401	739	109	499

数学游戏文献

高木茂男编

海外篇

在海外篇中收录了英国、美国、德国和法国的新版和重版书. 有序号的是现在可能购得的书.

(1) W. W. R. Ball, Mathematical recreations and essays, 11th ed. 1939, Macmillan.

1892 年第一版出版以来,每次修订时内容都有变化,W. W. R. Ball(1850—1925)去世后的第 11 版(Revised by H. S. M. Coxeter)的内容完全变了. 有日文版和法文版本.

(2) A. Bakst, Mathematics, its magic and mastery, 1941, Van Nostrand.

(3) A. Bakst, Mathematical puzzles and pastimes, 1954, do.

(4) H. E. Dudeney, The Canterbury puzzles, and other curious problems, 1907, Nelson.

(5) H. E. Dudeney, Amusements in mathematics, 1917, Nelson. 充实内容的代表作.

(6) H. E. Dudeney, puzzles and curious problems, 1932, Nelson. 作者去世后,由 J. Travers 编辑出版.

(7) J. N. Friend, Numbers, fun and facts, 1954, Scribaner's Sons.

(8) M. Kraitchik, Mathematical recreations, 1943, Dover, Allen and U. 作者(布鲁塞尔大学教授)于1941年以被美国聘请时的讲义为基础写出的著作.

(9) J. Leeming, Fun with puzzles, 1946, Lippincot.

(10) J. Leeming, More fun with puzzles, 1947, Lippncot.

(11) P. A. Meyer, Fun with mathematics, 1952, The World Publ. Co.

(12) H. Mckay, Odd numbers. Cambridge University Press.

(13) Mott-Smith, Mathematical puzzles for beginners and enthusiasts, Dover.

(14) E. P. Northrop, Riddles in mathematics, 1948, Eng. U. P.

(15) H. Steinhaus, mathematical Snapshots, 1950, Oxford.

(16) M. J. van Driel, Magic squares of $(2n+1)^2$ Cells, 1936, Rder.

(17) M. Kraichik, La mathématique des jeux; ou récréations mathématiques, Gauthier-Villars. (pp. 334)

该书是于1903年由布鲁塞尔的 Imprimerie Stevens Fréres 出版社出版的同一作者的同名著作的另一个版本.

(18) W. Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen, 1te Aufl. 1923, 2te Aufl. 1950, Vandenhoeck Ruprechtin.

该书中有数学游戏,同时也有丰富的具有故事韵味的内容. 在(26)后面列举了该书中引用的文献. 这样把主要文献全都列

举出来了.

(19) W. Lietzmann, Riesen und Zwerge in Zahlenreich, 1951, Teubner.

(20) W. Lietzmann, Wo streckt der Fehler? Mathematische Trugschlusse und Warnzeichen, 1950, Teubner.

(21) W. Lietzmann, Sonderlinge im Reich der Zahlen, 1949, Dümmler.

(22) A. Niklitschek, Im Zaubergarten der Mathematk, 1948, Brücken-Vesl.

(23) H. Schubert, Mathematische Mussestunden, 1953, de Gruyter.

(24) O. Toeplitzand H. Rademacher, The enjoyment of mathematics, Princeton Uni. Press.

(25) R. V. Heath, Mathemagic, 1953, Dover.

[454] (26) H. E. Licks, Recreations in mathematics, 1957, Van Nostrand, Macmillan.

W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Ⅰ, Ⅱ, 3te Aufl. 1921, Teubner.

W. Ahrens, Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik, Berlin, Springer, 1918.

W. T. Williams and G. H. Savage, The penguin problems book, Harmondsnorth Middesex, England, and New York, U. S. A.

J. Ghersi, Mathematica dilettevole e curiosa, Milano, Hoepli, 1913.

E. Fourrey, Récréations arithmétiques, Paris, Vuibert, 4 Aufl.

E. Fourrey, Curiosités géométriques, ebenda, 2 Aufl.

E. Lucas, Récréations mathématiques, Paris, Gauthier-

Villars, 4 Bände, z. T. in 2 Aufl. 1883 bis 1894.

E. Lucas, L'arithmétique amusante, ebenda, 1895.

F. Braun, Der junge Mathematiker und Naturforscher, Leipzig, Spamer, 1876.

H. Pfeiffer, Das Buch der Probleme, Kunststücke und Gesellschaftsscherze, Vobach, Berlin, 1902.

G. Kowalewski, Alte und neue mathematische Spiele, Leipzig, Teubner, 1930.

V. Graf, Kabarett der Mathematik, Dresden, Ehlermann, 1942.

W. Grosse, Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung, Leipzig, Quandt und Händel, 1897.

W. Ahrens, Mathematische Spiele, Sammlung aus Natur und Geisteswelt, 170. Bd, Leipzig, Teubener, 1te Aufl. 1907, 4 te Aufl. 1919.

A. Genau, Msthematische Überraschungen, Arnsberg, Stahl, ohne Jahreszahl(1913).

L. Mittenzwey, Mathematische Kurzweil, 6 Aufl. Leipzig, Klinkhardt, 1912. [455]

H. Wunsch, Unterhaltende Rechenstunden, Wien, Gerold, ohne Jahreszahl(1918).

A. Czepa, Mathematische Stuttgart, Union, DeutscheVerlagsanstadt, ohne Jahreszahl.

日文篇

在这里尽可能地收录了在日本出版的明治、大正和昭和年代的数学游戏著作.编者殷切地希望这个目录的完成.

1,喫霞楼仙客阅,洒落斋唐人著,鼓腹庵狸友校,武昌喫霞仙人翻译,算法珍书.明治元年(1868年).昭和10年(1935年),

第二次印刷.

2,福田利轩,算法玉手箱,明治12年(1879年).

3,作者不详,考物博士,明治24年(1891年),学龄馆.

4,永井千寿郎,游戏算术,明治24年(1891年),金港堂.

5,高桥九一、增山久吉,数理世界探险旅行,明治26年(1893年),学友社.

6,竹贯直人,数学游戏,明治32年(1899年),博文馆.

7,上村才六,算数奇观,明治34年(1901年),鸣皋书院,在《勘者御伽双纸》的内容中添加了一些西方数学游戏的书.

8,《数学世界》增刊,《勘者御伽双纸》(3册),明治38年(1905年),博文馆,这也是对《勘者御伽双纸》作了一些注解后,作为附录说明了《算脱和方阵》.

9,《数学世界》增刊,数学游戏,明治41年(1908年),博文馆.

10,佐久间信泰,数学玩具箱,明治42年(1909年).

11,大上茂乔,世界丛书:数理奇谈,明治44年(1911年),博文馆.

12,三上义夫,和算的方阵问题,大正6年(1917年),帝国学士院.

13,作者不详,珍奇算术的游戏方法,昭和2年(1927年),金龙堂.

[456] 14,津田千秋,数学游戏一百题,昭和3年(1928年),昭文馆.

15,大上茂乔,数学闲话,昭和3年(1928年),文明社,这是上面《数理奇谈》的修订版.

16,楠木虎四郎,趣味数学的应用研究,昭和6年(1931年),文录社.

17,中根彦循,《勘者御伽双纸》,昭和9年(1934年),古典数学书院,第一版是在宽保三年出版的江户时代代表性的数学

游戏书.

18,村井中渐,《算法童子问》,昭和 11 年(1936 年),古典数学书院,第一版是在天明元年(1784 年)出版.是《勘者御伽双纸》的续篇.

19,柴山雄三郎,数学游戏考物,昭和 13 年(1938 年),偕成社.

20,藤村幸三郎,最新数学游戏,昭和 13 年(1938 年),研究社.

21,藤村幸三郎,最新数学游戏 100 题,昭和 15 年(1940 年),研究社.

22,藤村幸三郎,最新数学游戏的研究,昭和 18 年(1943),研究社,以上 3 篇书被称为入门篇、展望篇和研究篇三部曲.

23,藤原安治郎,趣味数学教室,昭和 14 年(1939 年),研究社.

24,山崎三郎翻译,数与图形,昭和 16 年(1941 年),创元社.原著为:H. Rademacher und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, 1930.

25,松田道雄,数学余技,昭和 16 年(1941 年),修教社书院,此书深刻地探讨了数学游戏的理论.

26,高津严翻译,数学的胜利,昭和 17 年(1942 年),共立社,原著为:Dörrie, Triumph der Mathematik, 1933.

27,安部元章,数与算盘,昭和 17 年(1942 年),珠算研究社.

28,安部元章,续数与算盘,昭和 18 年(1943 年),大纮书院.

29,中根法轴,大矢真一译注,《勘者御伽双纸》,昭和 19 年(1944 年),大纮书院.

30,村井中渐著,大矢真一译注,《算法童子问》,昭和 19 年(1944 年),大纮书院.

[457] 31，高木贞治，数学小景，昭和 18 年(1943 年)，岩波书店.

32，佐野昌一，虫食算大全，昭和 21 年(1946 年)，力书房.

33，佐野昌一，林米田改增，推理学校虫食算大全，昭和 25 年(1950 年)，力书房.

34，渡边茂、佐藤常三，趣味数学，昭和 22 年(1947 年)，诚文堂新光社.

35，内海静波，(学习参考)有趣的数学，昭和 23 年(1948 年)，弘文社.

36，松田道雄，数学与数学游戏，昭和 23 年(1948 年)，牧书房.

37，河野伊三郎，智力测验，昭和 23 年(1948 年)，文求社.

38，森本清吾，数学考物与数学游戏，昭和 23 年(1948 年)，牧书房.

39，平山谛，话方阵，昭和 29 年(1954 年)，中教出版.

40，藤村幸三郎，推理测验，昭和 30 年(1955 年)，小山书店.

41，藤村幸三郎，续数学测验，昭和 30 年(1955 年)，小山书店.

42，藤村幸三郎，续推理测验，昭和 31 年(1956 年)，小山书店.

43，小城荣，图形测验，昭和 31 年(1956 年)，小山书店.

44，高木佐加枝，问答教室，昭和 30 年(1955 年)，日本文化科学社.

除上述图书以外，具有浓厚的数学游戏色彩的随笔集，还有吉冈修一郎的《新编数学幽默》和《续编数学幽默》(均由学生社出版). 另外，还有许多找不到的第二次世界大战前的书.

以上为一般性的数学游戏书，下面列举特别针对儿童的数学游戏书.

45，坂下龟太郎，图说游戏算术，明治 26 年(1893 年)，博文

馆.

46,木村秋一,滑稽对话魔法算术,昭和 3 年(1928 年),日本出版社.

47,竹内端三,有趣的数学,昭和 3 年(1928 年),アルス.

48,渡边军治,测验玩具的制作方法和游戏方法,昭和 8 年(1933 年),新泉社.

49,林正一,神秘的有趣数学,昭和 9 年(1934 年),ナウカ社.

50,滑德市,趣味数学游戏,昭和 11 年(1936 年),三友社.

51,滑德市,趣味高等数学游戏,昭和 12 年(1937 年),三友社.

52,镜渊稔,趣味世界数学物语,昭和 12 年(1937 年),启文社.

53,镜渊稔,趣味世界数学读本,昭和 14 年(1939 年),启文社.第 52 本的修订本. [458]

54,镜渊稔,趣味世界数学游戏,昭和 14 年(1939 年),启文社.

55,镜渊稔,趣味数学游戏,启文社.

56,中泽伊与吉,学校外学习的趣味算术,昭和 13 年(1940 年),文洋社.

57,藤原安治郎,有趣的算术游戏,昭和 15 年(1940 年),诚文堂新光社.

58,藤原安治郎,快乐的算术学校,昭和 15 年(1940 年),诚文堂新光社.

59,藤原安治郎,数的心,昭和 16 年(1941 年),诚文堂新光社.

60,藤原安治郎,让我们快乐的——数的五十三次,昭和 16 年(1941),三省堂.

61,藤原安治郎,思考的乐趣,昭和 17 年(1942 年),研究

社.

62,藤原安治郎,数的乐趣,昭和 17 年(1942 年),研究社.

63,高木佐加枝,少年趣味算术,昭和 17 年(1942 年),日本出版社.

64,境新,数学的乐趣——不可思议的“9”,昭和 22 年(1947 年),日本纸工出版社.

65,藤原安治郎,快乐的算术教室,昭和 23 年(1948 年),妙义出版.

66,数学研究社,算术知识的源泉,昭和 24 年(1949 年),数学研究社.

67,藤村幸三郎,有趣的算术测验,昭和 24 年(1949 年),妙义出版.

68,藤村幸三郎,数的游戏,昭和 26 年(1951 年),小峰书店.

69,藤村幸三郎,算术智力测试,昭和 27 年(1952 年),筑摩书房.

70,高桥四郎、新川进,游戏的书,昭和 27 年(1952 年),牧书店.

71,大矢真一,数学游戏与制作方法,昭和 26 年(1951 年),さ・え・ら书房.

72,黑田、大矢等,有趣的算术(1—6 年级),大日本图书.

73,松山干雄,算术是为什么的教室,昭和 30 年(1955 年),保育社.

74,藤原安治郎,有趣的算术(1—4 年级),昭和 31 年(1956 年),泰光社.

以下为自版书(没有出版号的书).多为誊写本,这里列举了页数相当多的书.

75,境新,数字的神秘魔方阵,1—3 卷,昭和 11 年(1936 年).

76,浦田繁松,方阵汇报第一卷,昭和 12 年(1937 年).

77,安部元章,话方阵,1、2 卷,昭和 14 年(1939 年).

78,浦田繁松,星阵,第一版,第二版修订版,昭和 23 年(1948 年).

79,浦田繁松,四方阵第一卷,昭和 23 年(1948 年).

80,浦田繁松,作数,昭和 25 年(1950 年).

81,安部元章,数的乐趣(1),昭和 24 年(1949 年).

82,泉行藏,四方阵的新作法.

83,高木茂男,话虫食算,昭和 28 年(1953 年).

84,浦田繁松,作数——相同数字与不同的数字,昭和 28 年(1953 年).

85,浦田繁松,星阵第三版,昭和 30 年(1055 年).

86,泉行藏、阿部乐方,有多少四方阵,昭和 29 年(1954 年),利用四进制法确定了四方阵的个数.

87,栗原茂,100 以内的计算(第一部数字的再现),昭和 29 年(1954 年).

88,寺村周太郎,对称连结型魔方阵,昭和 28 年(1953 年).

89,浦田繁松,完全四次元方阵,昭和 31 年(1956 年).

90,森本清吾,数学的思考与数学游戏,昭和 31 年(1956 年),牧书店,于昭和 23 年出版的同名书的修订版.

91,あまからクラブ同人,数学测验,昭和 31 年(1956 年),春肠堂.

92,柴田直光,难题的癖好,昭和 31 年(1956 年),理工图书.

93,青山博治郎,数的世界,昭和 27 年(1952 年),牧书店.

94,坂部政七译,西洋智慧板图解,明治 10 年(1877 年),关正堂.

95,八木定太郎,算术奇观,明治 31 年(1956 年),北隆馆出版部,这是第 7 文献的原版本.

96,日下英一郎,魔方阵,大正 11 年(1922 年),北隆馆.

97,儿童教育研究会,利用算术的新奇的游戏方法,大正 13 年(1924 年),富文馆.

98,田中金一,数理的神秘及其应用,昭和 10 年(1935 年),帝国书院.

99,数理研究会,透视术,昭和 13 年(1938 年),兴风书院.

[460] 100,宫本、大喜多翻译,数学的世界(上、下),昭和 30 年(1955 年),河出书房.原著为:E. Kasner & J. Newman, Mathematics and the Imagination, 1940.

101,大矢真一,难题读本,昭和 31 年(1956 年),小学馆(《中学生之友》第 33 卷第 9 号上登载).

102,大矢真一,续难题读本,昭和 31 年(1956 年),小学馆(《中学生之友》第 33 卷第 10 号上登载).

针对儿童的读物有

1,竹贯直人,少年算术游戏,明治 39 年(1906 年),博文馆.

2,藤原安治郎,不可思议的数,昭和 22 年(1937 年),二叶书店.

3,镜渊稔,有趣的数学物语,昭和 23 年(1938 年),纪文书院(启文社).

4,镜渊稔,有趣的数学教室,昭和 23 年(1938 年),纪文书院(启文社).

5,高木佐加枝,数的智慧囊,昭和 24 年(1939 年),府中书院.

6,高木佐加枝,数与游戏,昭和 24 年(1939 年),府中书院.

7,藤原安治郎,有趣的数的源泉,昭和 26 年(1941 年),新兴出版社启林馆.

8,藤原安治郎,有趣的形状的世界,昭和 26 年(1951 年),新兴出版社启林馆.

9,藤原安治郎,有趣的数的生命,昭和 27 年(1952 年),新兴出版社启林馆.

10,藤原安治郎,有趣的数字游戏,昭和 27 年(1952 年),新兴出版社启林馆.

11,藤原安治郎,趣味数字漫步,昭和 28 年(1953 年),新兴出版社启林馆.

12,石田贞一,趣味算术游戏,昭和 28 年(1953 年),东西文明社.

13,小松直行,话快乐的算术,昭和 29 年(1954 年),东西文明社.

14,镜渊稔,趣味数学物语,昭和 29 年(1954 年),启文社(纪文书院).

自家版书有:

1,日野秀男,数学测验,昭和 27 年(1952 年). [461]

2,芝田传次,魔法算的研究,昭和 28 年(1953 年).

3,近藤胜,算术奇观入门,昭和 29 年(1954 年).

4,小林茂太郎,正多边形顶点问题,昭和 31 年(1956 年).

5,小林茂太郎,积木问题,昭和 31 年(1956 年).

6,高木茂男.关于难题文献,昭和 31 年(1956 年). [462]

素因数分解表

1—100 000

素数表和素因数分解表不仅有助于数学教育，而且在学问方面也非常重要. 现在世界上最高水平的有以下两种书：

D. N. Lehmer, Factor table, 1914.

（素数表为 0—10 006 721，素因数分解表为 0—10 017 000 的最小因数 1 个）

G. Kavàn, Factor table, 1937.

（1—256 000 的全部数的完全素因数分解表）

日本有以下两种：

田中增太郎，《计算精表》，昭和 6 年（2，3，5 的倍数以外的素因数分解表 1—10 000）

《丸善对数表》，昭和 24 年（0—2 009 的全部数的完全素因数分解表）

这两种书与世界先进水平相差甚远.《丸善对数表》只到 2009，仅有 8 页纸. 但该书以 G. Inghirami, Table des nombres premiers（1919）为示范，在参考 D. N. Lehmer, Factor table（1914）和 L. Poletti, Tavole di numeri primi（1920）等文献的基础上编写简便对数表.

［素因数分解表使用方法］

该表给出了除 2，5 的倍数以外从 1 到 10 万的最小因数 1 个. 用点表示了素数.

在上段和下段的横行写了后两位数，在纵列上写了其余数.

例如，当因数分解 99 997 时，前面三位数在最后页的最下段. 后两位数 97 在从右第二列上，在该位置上有最小因数 19.

［463］ 进行除法计算 99 997÷19＝5 263，然后去求 5 263 的因数即可.

I

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
0	.			3		.	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3		.	.	7
1	.	.	.	.	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.	3	11	3	.
2	3	7	3	11	.	3	7	3	13	.	.	.	3	.	3	.	.	3	13	3
3	7	3	.	3	.	.	.	11	3	17	3	7	.	3	.	3	11	7	.	.
4	.	13	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	19	.	3	.	3	.
5	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	17	23	3	13	3	7	.	3	.	3
6	.	3	.	3	13	.	.	.	3	7	3	17	.	3	7	3	.	.	.	11
7	.	19	7	.	3	23	3	.	7	3	.	3	17	.	11	.	3	.	3	7
8	3	11	3	.	.	3	19	3	.	.	.	.	3	7	3	.	29	3	7	3
9	17	3	.	3	.	11	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	.	23	.	13
10	7	17	19	.	3	.	3	.	.	3	13	3	.	.	17	.	3	7	3	.
11	3	.	3	.	11	3	.	3	19	.	7	.	3	11	3	17	7	3	31	3
12	.	3	17	3	7	.	.	23	3	.	3	.	.	3	.	3	17	11	29	.
13	.	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	11	31	7	13	3	17	3	19
14	3	23	3	.	17	3	13	3	7	.	.	.	3	.	3	.	11	3	.	3
15	19	3	11	3	.	17	37	7	3	.	3	11	.	3	29	3	23	.	7	.
16	.	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	23	.	11	3	31	3	17
17	3	13	3	.	29	3	17	3	.	.	11	7	3	.	3	37	.	3	.	3
18	.	3	13	3	.	7	23	17	3	.	3	31	.	3	11	3	7	19	.	43
19	.	11	.	23	3	.	3	19	17	3	41	3	.	.	13	7	3	29	3	.
20	3	.	3	7	.	3	.	3	43	7	.	.	3	19	3	.	13	3	23	3
21	11	3	7	3	.	.	29	13	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	19	7
22	31	.	.	47	3	.	3	7	.	3	17	3	23	7	.	.	3	.	3	13
23	3	7	3	.	.	3	7	3	11	23	13	17	3	.	3	.	.	3	.	3
24	7	3	29	3	.	19	.	41	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	31
25	41	.	23	13	3	7	3	11	.	3	7	3	.	17	43	.	3	.	3	.
26	3	19	3	.	7	3	.	3	.	43	37	11	3	.	3	7	19	3	.	3
27	37	3	.	3	.	.	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	13	41	.
28	.	.	7	53	3	29	3	.	7	3	11	3	19	.	.	17	3	.	3	7
29	3	.	3	.	41	3	.	3	23	37	.	29	3	7	3	.	17	3	7	3
30	.	3	31	3	.	23	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3	.	17	11	.
31	7	29	13	.	3	11	3	.	.	3	53	3	31	13	.	43	3	7	3	47
32	3	.	3	.	13	3	.	3	.	11	7	.	3	53	3	41	7	3	17	3
33	.	3	.	3	7	.	31	.	3	.	3	.	.	3	47	3	13	.	.	17
34	19	41	.	7	3	.	3	13	11	3	23	3	47	.	7	19	3	11	3	.
35	3	31	3	11	.	3	.	3	7	13	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
36	13	3	.	3	23	.	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	11	.	7	41
37	.	7	11	.	3	47	3	.	61	3	.	3	7	.	37	.	3	19	3	23
38	3	.	3	13	37	3	11	3	.	.	43	7	3	.	3	11	23	3	.	3
39	47	3	.	3	.	7	.	.	3	.	3	.	.	3	31	3	7	.	.	11
40	.	.	.	19	3	.	3	.	.	3	.	3	29	37	11	7	3	13	3	.
41	3	11	3	7	.	3	23	3	13	7	.	.	3	.	3	.	41	3	11	3
42	.	3	7	3	.	11	.	.	3	41	3	.	.	3	19	3	.	.	31	7
43	11	13	59	31	3	19	3	7	29	3	.	3	61	7	.	.	3	43	3	.
44	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	19	43	3	11	3	23	.	3	.	3
45	7	3	.	3	13	.	.	.	3	.	3	7	23	3	13	3	19	7	.	.
46	43	.	17	11	3	7	3	31	.	3	7	3	11	41	.	.	3	.	3	.
47	3	.	3	17	7	3	53	3	.	.	29	.	3	.	3	7	11	3	47	3
48	.	3	11	3	17	.	.	61	3	7	3	11	.	3	7	3	47	29	37	13
49	13	.	7	.	3	17	3	.	7	3	13	3	.	.	.	11	3	.	3	7
50	3	.	3	.	.	3	29	3	.	.	11	47	3	7	3	.	71	3	7	3
51	.	3	.	3	19	.	7	.	3	47	3	23	7	3	11	3	53	37	.	19
52	7	11	41	.	3	13	3	17	23	3	.	3	.	.	.	13	3	7	3	29
53	3	.	3	.	47	3	13	3	17	.	7	73	3	.	3	19	7	3	.	3
54	11	3	.	3	7	.	.	.	3	11	3	61	.	3	.	3	.	.	13	.
55	.	.	.	7	3	37	3	.	.	3	.	3	.	11	7	29	3	23	3	31
56	3	13	3	71	31	3	41	3	7	3	17	13	3	43	3	.	.	3	.	3
57	.	3	13	3	.	29	.	7	3	59	3	17	11	3	.	3	.	.	7	.
58	.	7	.	37	3	.	3	11	.	3	.	3	7	19	13	.	3	.	3	.
59	3	.	3	19	23	3	61	3	31	.	.	7	3	17	3	.	13	3	19	3
60	17	3	.	3	.	7	11	13	3	19	3	.	37	3	.	3	7	.	.	23
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
0	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3
1	.	3	.	3	7	.	.	13	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	.	.
2	.	11	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	.	7	17	3	.	3	13
3	3	.	3	.	19	3	.	3	7	.	13	.	3	.	3	.	17	3	.	3
4	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	.	13	3	.	3	.	17	7	.
5	19	7	.	13	3	.	3	.	.	3	.	3	7	11	.	19	3	.	3	.
6	3	.	3	.	.	3	23	3	11	.	.	7	3	.	3	13	.	3	17	3
7	.	3	.	3	.	7	13	.	3	.	3	19	11	3	.	3	7	13	.	17
8	23	.	.	.	3	.	3	11	13	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	29
9	3	.	3	7	31	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	23	.	3	.	3
10	.	3	7	3	.	.	11	.	3	29	3	13	23	3	.	3	.	.	.	7
11	.	.	13	19	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	.	29	3	.	3	11
12	3	7	3	.	13	3	7	3	31	19	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
13	7	3	23	3	.	29	.	37	3	.	3	7	.	3	19	3	13	7	11	.
14	.	.	31	.	3	7	3	13	.	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	.
15	3	.	3	.	7	3	.	3	.	11	19	.	3	.	3	7	37	3	.	3
16	13	3	.	3	11	.	.	.	3	7	3	23	41	3	7	3	19	.	.	.
17	17	.	7	.	3	41	3	29	7	3	.	3	13	.	.	.	3	11	3	7
18	3	17	3	11	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	.	31	3	7	3
19	.	3	19	3	37	13	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3	11	.	.	.
20	7	.	11	29	3	.	3	.	19	3	31	3	.	.	.	.	3	7	3	.
21	3	.	3	17	.	3	11	3	13	41	7	.	3	37	3	11	7	3	13	3
22	.	3	37	3	7	31	.	.	3	.	3	43	.	3	.	3	29	.	.	11
23	.	13	.	7	3	17	3	23	.	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	.
24	3	11	3	.	23	3	.	3	7	.	.	37	3	13	3	19	47	3	11	3
25	.	3	.	3	13	11	17	7	3	31	3	.	29	3	13	3	.	.	7	23
26	11	7	.	.	3	.	3	17	.	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.
27	3	.	3	31	11	3	.	3	17	47	.	7	3	11	3	.	.	3	.	3
28	.	3	.	3	.	7	47	19	3	13	3	.	43	3	.	3	7	11	.	13
29	13	.	.	11	3	.	3	.	.	3	13	3	11	19	29	7	3	41	3	.
30	3	43	3	7	.	3	.	3	37	7	17	.	3	.	3	.	11	3	19	3
31	23	3	7	3	29	.	.	.	3	19	3	11	.	3	.	3	.	31	23	7
32	.	.	.	.	3	13	3	7	.	3	29	3	17	7	19	11	3	37	3	.
33	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	11	31	3	17	3	.	.	3	43	3
34	7	3	.	3	.	.	.	.	3	23	3	7	59	3	11	3	.	7	13	.
35	53	11	.	.	3	7	3	43	.	3	7	3	.	.	17	37	3	.	3	59
36	3	13	3	.	7	3	19	3	.	.	.	13	3	29	3	7	.	3	.	3
37	11	3	13	3	.	53	.	.	3	7	3	.	19	3	7	3	17	.	.	29
38	.	.	7	17	3	.	3	53	7	3	.	3	.	11	13	.	3	17	3	7
39	3	59	3	37	17	3	.	3	11	29	41	23	3	7	3	.	13	3	7	3
40	.	3	.	3	31	17	7	13	3	.	3	.	7	3	61	3	.	.	17	.
41	7	.	.	.	3	23	3	11	43	3	.	3	37	47	53	59	3	7	3	13
42	3	.	3	.	.	3	17	3	.	.	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3
43	19	3	.	3	7	.	11	17	3	.	3	29	13	3	41	3	.	23	.	53
44	.	61	.	7	3	.	3	41	17	3	11	3	.	.	7	67	3	.	3	11
45	3	29	3	47	.	3	.	3	7	17	23	19	3	.	3	13	.	3	.	3
46	.	3	.	3	59	.	13	7	3	.	3	.	31	3	43	3	.	13	7	37
47	.	7	67	.	3	11	3	19	13	3	17	3	7	.	.	.	3	.	3	.
48	3	23	3	43	.	3	31	3	.	11	.	7	3	19	3	.	67	3	59	3
49	.	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	13	17	3	.	3	7	.	19	.
50	.	31	13	.	3	61	3	37	11	3	.	3	.	13	.	7	3	11	3	.
51	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	31	.	3	71	3	.	29	3	.	3
52	59	3	7	3	.	19	23	11	3	.	3	.	.	3	17	3	11	67	.	7
53	.	53	11	23	3	31	3	7	41	3	19	3	.	7	.	17	3	.	3	.
54	3	7	3	53	43	3	7	3	.	13	.	.	3	.	3	11	17	3	23	3
55	7	3	.	3	67	.	19	.	3	.	3	7	.	3	37	3	.	7	29	11
56	.	.	.	.	3	7	3	.	53	3	7	3	13	.	11	.	3	.	3	41
57	3	11	3	13	7	3	73	3	29	23	53	.	3	.	3	7	.	3	11	3
58	.	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	43	71	.	17
59	11	.	7	59	3	67	3	47	7	3	43	3	.	31	.	53	3	13	3	7
60	3	.	3	73	11	3	.	3	13	.	59	.	3	7	3	.	.	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

61 01

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
61	.	17	31	41	3	.	3	29	.	3	11	3	.	.	17	7	3	.	3	11
62	3	.	3	7	.	3		3	.	7	13	.	3	23	3	17	79	3	.	3
63	.	3	7	3	.	59	.	71	3	.	3	.	13	3	.	3	17	.	11	7
64	37	19	43	13	3	11	3	7	.	3	.	3	59	7	41	47	3	17	3	.
65	3	7	3	23	17	3	7	3	.	11	61	.	3	47	3	13	31	3	.	3
66	7	3	.	3	11	17	13	.	3	37	3	7	19	3		3	29	7	17	61
67	.	.	19	.	3	7	3	.	11	3	7	3	53	.	.	23	3	11	3	17
68	3	.	3	11	7	3	17	3	19		.	.	3	.	3	7	.	3	41	3
69	67	3	.	3	.	31	.	11	3	7	3	13	29	3	7	3	11	53	.	.
70	.	47	7	43	3	.	3		7	3	.	3	79	13	31	.	3	.	3	7
71	3	.	3	.	13	3	11	3	.	17		.	3	7	3	11	37	3	7	3
72	19	3	.	3	.	.	7	.	3	31	3	.	7	3	.	3	13	.	.	11
73	7	67	.	.	3	71	3	13	.	3	17	3	.	.	11	41	3	7	3	.
74	3	11	3	31	.	3	.	3	41	13	7	17	3	.	3	43	7	3	11	3
75	13	3	.	3	7	11		73	3	.	3	.	17	3	.	3	.	19	.	.
76	11	.	.	7	3	23	3	19	.	3	29	3	13	17	7	.	3	.	3	.
77	3	.	3	13	11	3	.	3	7	.	.	59	3	11	3	71	.	3	61	3
78	29	3	37	3	73	13	.	7	3	.	3	.	41	3	17	3	.	11	7	47
79	.	7	.	11	3	41	3	.	89	3	.	3	7	.	.	17	3	13	3	.
80	3	53	3	.	.	3	.	3	13	71	23	7	3	29	3	.	11	3	13	3
81	.	3	11	3	.	7	.	23	3	.	3	11	47	3	79	3	7	17	.	29
82	59	13	29	.	3	43	3	.	.	3	19	3	.	.	.	7	3	.	3	73
83	3	19	3	7	.	3	.	3	53	7	11	.	3	13	3	31	19	3	17	3
84	31	3	7	3	13	47	19	.	3	.	3	.	.	3	11	3	23	.	.	7
85	.	11	47	67	3	.	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	.	3	83
86	3	7	3	.	79	3	7	3	37	.	.	.	3	89	3	53	.	3	.	3
87	7	3	.	3	31	.	23	.	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13
88	13	.	.	23	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	.	3	37	3	.
89	3	29	3	59	7	3	37	3	11	.	79	.	3	.	3	7	.	3	23	3
90	.	3	.	3	.	.	71	29	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	83	.
91	19	.	7	.	3	13	3	11	7	3	.	3	23	.	.	13	3	41	3	7
92	3	.	3	.	61	3	13	3	.	23	.	11	3	7	3	.	.	3	7	3
93	71	3	41	3	.	67	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	.	.	13	.
94	7	.	23	97	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	.	.	3	7	3	11
95	3	13	3	37	.	3	31	3	.	89	7	13	3	.	3	.	7	3	.	3
96	.	3	13	3	7	.	59	.	3	.	3	.	.	3	23	3	31	.	11	.
97	89	31	17	7	3	11	3	.	.	3	71	3	37	.	7	.	3	.	3	.
98	3	.	3	17	.	3	.	3	7	11	31	.	3	.	3	.	13	3	43	3
99	.	3	.	3	11	23	47	7	3	.	3	.	.	3	19	3	.	61	7	.
100	73	7	.	.	3	17	3	43	11	3	37	3	7	79	.	.	3	11	3	13
101	3	.	3	11	.	3	67	3	29	53	13	7	3	.	3	.	.	3	73	3
02	101	3	59	3	.	7	17	11	3	.	3	53	13	3	29	3	7	.	.	37
03	.	.	11	13	3	.	3	17	.	3	23	3	.	.	.	7	3	.	3	79
04	3	101	3	7	29	3	11	3	17	7	.	.	3	.	3	11	53	3	31	3
05	.	3	7	3	23	.	13	67	3	17	3	.	.	3	41	3	83	13	53	7
106	.	23	.	103	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	11	.	3	29	3	23
07	3	7	3	.	.	3	7	3	71	.	17	.	3	.	3	.	23	3	11	3
08	7	3	101	3	19	11	29	31	3	79	3	7	.	3	.	3	37	7	.	19
09	11	.	13	.	3	7	3	61	67	3	7	3	17	13	.	.	3	31	3	.
10	3	.	3	101	7	3	23	3	103	73	.	41	3	11	3	7	61	3	.	3
111	17	3	29	3	41	.	.	.	3	7	3	31	.	3	7	3	13	11	71	.
12	23	17	7	11	3	.	3	13	7	3	103	3	11	47	17	.	3	.	3	7
13	3	89	3	43	.	3	.	3	.	13	47	.	3	7	3	17	11	3	7	3
14	13	3	11	3	.	101	7	19	3	.	3	11	7	3	.	3	17	.	.	107
15	7	.	37	17	3	29	3	.	41	3	.	3	13	19	83	11	3	7	3	.
116	3	41	3	13	17	3	.	3	.	59	7	29	3	.	3	103	7	3	19	3
17	.	3	23	3	7	13	.	.	3	19	3	37	.	3	11	3	59	.	17	31
18	.	11	.	7	3	.	3	53	.	3	.	3	.	.	7	.	3	13	3	17
19	3	.	3	.	43	3	17	3	7	.	.	79	3	.	3	.	.	3	13	3
120	11	3	.	3	.	41	61	7	3	11	3	23	53	3	.	3	.	.	7	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
61	.	3	47	3	61		7	31	3	.	3	37	7	3	23	3	41	11		
62	7	13	.	11	3	.	3	.	.	3	.	3	11	61		19	3	7	3	.
63	3	.	3	.		3	.	3	23		7	.	3	13	3	.	7	3	.	3
64	.	3	11	3	7	23	29	.	3		3	11	.	3	13	3	.	43	73	67
65	.	.	79	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	29	7	11	3	19	3	.
66	3	.	3	.	.	3	59	3	7	.	11	.	3	41	3	.	.	3	37	3
67	43	3	29	3	.	.	67	7	3	13	3	.	.	3	11	3	.	.	7	13
68	13	7	.	19	3	.	3	.	.	3	13	3	7	.	71	83	3	61	3	
69	3	17	3	.	.	3	.	3	.	19	.	7	3	.	3	29	.	3	.	3
70	11	3	.	3	23	7	37	.	3	11	3	.	73	3	19	3	7	41	47	31
71	.	23	17	.	3	13	3	67	71	3	.	3	43	11	.	7	3	.	3	23
72	3	.	3	7	53	3	13	3	11	7	19	29	3	.	3	37	23	3	.	3
73	.	3	7	3	17	37	53	.	3	73	3	47	11	3	83	3	19	.	13	7
74	.	29	.		3	17	3	7	31	3	.	3	.	7	.		3	59	3	.
75	3	7	3	.	.	3	7	3	67	.	.	11	3	.	3	.	.	3	71	3
76	7	3	13	3	47	79	11	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	43	.
77	23	.	.	.	3	7	3	17	19	3	7	3	31	43	13	.	3		3	11
78	3	.	3	29	7	3	.	3	17			.	3	.	3	7	13	3	53	3
79	.	3	73	3	19	.	31	13	3	7	3	79	23	3	7	3	61	.	11	19
80	83	.	7	.	3	11	3		7	3	41	3	.	59	.	.	3	.	3	7
81	3	31	3	41	.	3	.	3	.	11	13	.	3	7	3	19		3	7	3
82	37	3	23	3	11	.	7	.	3	.	3	17	7	3	.	3	.	.	.	43
83	7	.	61	13	3		3	.	11	3		3	17	83	.	.	3	7	3	37
84	3	79	3	11	.	3	.	3	43	37	7	61	3	17	3	13	7	3	29	3
85	17	3	43	3	7	.	13	11	3	.	3	23	.	3	31	3	11	13	.	.
86	41	17	11	7	3	.	3		13	3	.	3	.	19	7	.	3	.	3	
87	3		3	19	.	3	11	3	7	31	67	.	3	.	3	11	59	3	19	3
88	53	3	17	3		.	.	7	3	19	3	13	83	3	.	3	17	.	7	11
89	.	7	13	17	3	.	3	.	.	3	47	3	7	13	11	89	3	17	3	.
90	3	11	3	.	13	3	.	3	47	43	29	7	3	31	3	61	.	3	11	3
91	.	3	.	3	.	7	89	53	3	.	3	67	.	3	.	3	7	29	17	
92	11	19	.	47	3	59	3	13	73	3		3	.	.	37	7	3		3	17
93	3	47	3	7	11	3	17	3	.	7	.	83	3	11	3	41	.	3	.	3
94	13	3	7	3	.	.	.	17	3	.	3	.	19	3	53	3	.	11		7
95	.	41	19	11	3	73	3	7	17	3	61	3	11	7	.	43	3	53	3	29
96	3	7	3	13	.	3	7	3	19	17			3	23	3		11	3		3
97	7	3	11	3	43	13	.	.	3	29	3	7	.	3		3	.	7	97	41
98		59	.	.	3	7	3	71	.	3	7	3	41	.	.	11	3	13	3	19
99	3	37	3	23	7	3	.	3	13	.	11	17	3	67	3	7	97	3	13	3
100	19	3	89	3	.	29	.	.	3	7	3	.	17	3	7	3		.	23	
101	.	11	7	.	3		3		7	3	.	3	.	17	61	23	3		3	7
102	3	.	3	.	31	3		3	.		43	19	3	7	3	.	41	3	7	3
103	11	3	.	3	13	43	7	.	3	11	3	97	7	3	13	3	.	19	37	
104	7	.	.	.	3	.	3	19	37	3	.	3	47	11	.	17	3	7	3	
105	3	61	3	.	59	3	.	3	11	97	7	71	3	19	3	.	7	3	.	3
106	.	3	.	3	7	.	.	47	3	13	3	59	11	3	.	3	.	17	19	13
107	13	.	31	7	3	47	3	11	.	3	13	3	.	41	7		3	43	3	.
108	3	.	3	.	.	3	.	3	7	83	73	11	3	.	3	.	.	3	17	3
109	47	3	.	3	97	19	11	7	3	.	3	.	79	3		3	29	.	7	17
110	43	7	.		3	13	3		.	3	11	3	7	.	.	13	3	.	3	11
111	3	19	3	.	.	3	13	3	.	.	.	7	3	53	3	67	19	3		3
112	.	3		3	.	7	19	59	3	.	3	.	29	3	.	3	7	23	11	
113	.	.	41	37	3	11	3	.	83	3	31	3	19	.	59	7	3	.	3	.
114	3	13	3	7	73	3	.	3	.	7	23	13	3	.	3		.	3	.	3
115	.	3	7	3	11	31	43	23	3	71	3	.	37	3	.	3	67	.	.	7
116	61	43	.	89	3	107	3	7	11	3	.	3	.	7	13	.	3	11	3	.
117	3	7	3	11	19	3	7	3	79	61	.	.	3	.	3	.	13	3	47	3
118	7	3	71	3	29	.		11	3	31	3	7	109	3	.	3	11	7	.	73
119	17	.	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	.	19	3	67	3	13
120	3	17	3	31	7	3	11	3	.	.	13	47	3	43	3	7	107	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

12101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
121	.	7	.	.	3	.	3		17	3	67	3	7	11	53	61	3	.	3	.
22	3		3	29	.	3	19	3	11	17		7	3	13	3	.	.	3	37	3
23	.	3	31	3	13	7	109	97	3	.	3		11	3	13	3	7		.	53
24	.	79	19	.	3	.	3	11	.	3	17	3	31	.	.	7	3	23	3	59
25	3	.	3	7	.	3	.	3	19	7		11	3	83	3	.	.	3		3
126	.	3	7	3	.	.	11	.	3	13	3	73	17	3	.	3	.	47	.	7
27	13	.	97	71	3		3	7		3	11	3	29	7	47	.	3	.	3	11
28	3	7	3	.	23	3	7	3	.	.	101	.	3	41	3	37	.	3	29	3
29	7	3	.	3	.	37	.	.	3		3	7	67	3	17	3		7	11	23
30	.	.	.	.	3	7	3	47	29	3	7	3	83	.	.	13	3		3	.
131	3	.	3	.	7	3	13	3	.	11		19	3	23	3	7	17	3	.	3
32	43	3	47	3	11	73	.		3	7	3	.	101	3	7	3	.	17	13	.
33	47	53	7	.	3	.	3	19	7	3		3	.	67	.	.	3	11	3	7
34	3	13	3	11	.	3		3	.	31	29	13	3	7	3	89	.	3	7	3
35	23	3	13	3	59	.	7	11	3	.	3	83	7	3	.	3	11	29	19	17
136	7	61	11	31	3	.	3	.	53	3	.	3	43	.	13	23	3	7	3	.
37	3	71	3	.	.	3	11	3	.	.	7	.	3	31	3	11	7	3	59	3
38	37	3	.	3	7	19	41	13	3	23	3	.	.	3	101	3	.	109	61	11
39	.	.	.	7	3	.	3	31	.	3	19	3	.	.	7	53	3	73	3	13
40	3	11	3	.	.	3	107	3	7	37	13	.	3	.	3	101	19	3	11	3
141	59	3	.	3	103	11	19	7	3	29	3	71	13	3	67	3	79		7	.
42	11	7	.	13	3	61	3	59	.	3	41	3	7	43	23	29	3	.	3	.
43	3	.	3	41	11	3	103	3	.	.	.	7	3	11	3	13	.	3	.	3
44	.	3	.	3	.	7	13	.	3	.	3	47	.	3	.	3	7	11	.	.
45	17	.	89	11	3	23	3		13	3	73	3	11	.	.	7	3	.	3	.
146	3	17	3	7	19	3	47	3	.	7	.	.	3	.	3	.	11	3	97	3
47	61	3	7	3	47	.	.	41	3	.	3	11		3		3	.	23	.	7
48	19	113	13	59	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	37	11	3	.	3	31
49	3	7	3	17	13	3	7	3	43	.	11	.	3	109	3	.	67	3	.	3
50	7	3	43	3	17	.	.	23	3	83	3	7	.	3	11	3	13	7	41	101
151	.	11	.	29	3	7	3	13	.	3	7	3	.	37	.	.	3	19	3	.
52	3	23	3	67	7	3	.	3	31	13		97	3	.	3	7	.	3	79	3
53	11	3		3	61	.	17	.	3	7	3	.	.	3	7	3	23	67	103	.
54	.	73	7	19	3	.	3	17	7	3	.	3	13	11	43	.	3	.	3	7
55	3	37	3	13	.	3	59	3	11	19	.	53	3	7	3	41	.	3	7	3
156	.	3		3	67	13	7		3	17	3	.	7	3	19	3	.		.	
57	7	41	13	23	3	19	3	11	79	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	
58	3	.	3		97	3	.	3	13	.	7	11	3	71	3	47	7	3	13	3
59		3		3	7	.	11	.	3	.	3	17	89	3	.	3	19	107	37	41
60	.	13	.	7	3	67	3	83	37	3	11	3	17	.	7	43	3	61	3	11
161	3		3	89	.	3	71	3	7	23	.	127	3	13	3	.	.	3	67	3
62	17	3	19	3	13	31	.	7	3	.	3	.		3	13	3	109	37	7	.
63	.	7	23	47	3	11	3	.	19	3	29	3	7	.	17	.	3	59	3	.
64	3	47	3	61	.	3		3	.	11	.	7	3	.	3	17	41	3	.	3
65	29	3	17	3	11	7	83	.	3	13	3	.	61	3	23	3	7	71	.	13
166	13			17	3	37	3	.	11	3	13	3		.	127	7	3	11	3	.
67	3	.	3	7	17	3	73	3	23	7	43	.	3	29	3	19	.	3	.	3
68	53	3	7	3	.	17	67	11	3	.	3	.	.	3	113	3	11	.	17	7
69	.	.	11	37	3	13	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13	3	.	3	17
70	3	7	3	73	.	3	7	3	.	29	.	.	3	.	3	11	.	3		3
171	7	3	.	3	71	109	.	17	3	.	3	7	37	3	.	3	61	7	13	11
72	103	.	.	.	3	7	3	67	17	3	7	3		19	11	.	3	43	3	47
73	3	11	3	19	7	3	.	3	.	17	.	13	3	.	3	7	.	3	11	3
74	.	3	13	3	23	11	.	.	3	7	3	29	.	3	7	3	107		73	.
75	11	23	7	.	3	83	3	.	7	3	17	3	47	89	13		3	53	3	7
176	3	29	3	.	11	3	79	3	67	.	.	17	3	7	3	31	13	3	7	3
77	31	3		3	89		7	13	3	37	3	.	7	3	.	3	113	11	.	.
78	7	19	.	11	3	47	3	103	71	3		3	11	17	.		3	7	3	13
79	3		3		.	3	19	3		.	7		3	79	3	.	7	3	131	3
180	47	3	11	3	7	.	43	37	3	67	3	11	13	3	17	3	.	.	.	
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
121	29	3		3	.	.	23	43	3	7	3	19	13	3	7	3	73	89	.	11
22	.	.	7	13	3	.	3	.	7	3		3		71	11	.	3	19	3	7
23	3	11	3	17	47	3	83	3	89	.	.	.	3	7	3	13	.	3	7	3
24	.	3	.	3	17	11	7	37	3	.	3		7	3	.	3	.	13	.	29
25	7	.	29	19	3	17	3	.	13	3	.	3	23	.	41	.	3	7	3	43
126	3	.	3	.	11	3	53	3	.	19	7	31	3	11	3		7	3	.	3
27	41	3	.	3	7	.	17	113	3	53	3	13	.	3	19	3	.	11	67	.
28	71	.	13	7	3	19	3	17	61	3	79	3	11	13	7	.	3	.	3	.
29	3	.	3	.	13	3	.	3	7	.	19	.	3	.	3	31	11	3	41	3
30	31	3	11	3	37	.	73	7	3	17	3	11	103	3	23	3	13		7	.
131		7	59	.	3	.	3	13	.	3	.	3	7	.	.	11	3	79	3	67
32	3	29	3	.	89	3	.	3	23	13	11	7	3	37	3	97		3	.	3
33	13	3	19	3	31	7	.	29	3	43	3	17	.	3	11	3	7	59	.	.
34	.	11	.	43	3	.	3	.	19	3	.	3	13	97	.	7	3	103	3	.
35	3	.	3	7	71	3	.	3	41	7	.	37	3	17	3	107	.	3	.	3
136	11	3	7	3	19	13	79	.	3	11	3	.	.	3	.	3		.	.	7
37	.	17	.	.	3	.	3	7	47	3	23	3	.	7	17	.	3	13	3	.
38	3	7	3	.	83	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	17	29	3	13	3
39	7	3	17	3	23	.	.	61	3	89	3	7	11	3	71	3	17	7	.	.
40	.	13	.	17	3	7	3	11	.	3	7	3	.	.	.	73	3	17	3	23
141	3	.	3	.	7	3	31	3	37	.	.	11	3	13	3	7	23	3	.	3
42	.	3	53	3	13	17	11	19	3	7	3	109	.	3	7	3	31	.	17	79
43	113	31	7	83	3	53	3	.	7	3	11	3	73	19	.	.	3	37	3	7
44	3	97	3	19	.	3	17	3	29	41	31	.	3	7	3	.	43	3	7	3
45	.	3	.	3	.	.	7	17	3	13	3	61	7	3	29	3	.	.	11	13
146	7	.	.	107	3	11	3	.	17	3	13	3	53	.	19	37	3	7	3	.
47	3	.	3	.	29	3	.	3	.	11	7	.	3	.	3	23	7	3	.	3
48	.	3	83	3	7	89	.	.	3	107	3	.	23	3	.	3	.	53	.	47
49	.	19	.	7	3	13	3	.	11	3	17	3	71	.	7	13	3	11	3	53
50	3	.	3	11	.	3	13	3	7		.	17	3	.	3	79	.	3	31	3
151	109	3	23	3	.	59	29	7	3	.	3	43	17	3	.	3	11	.	7	.
52	101	7	11	.	3	.	3	.	.	3	.	3	7	17	.	.	3	41	3	.
53	3	13	3	.	.	3	11	3	19	.	.	7	3	.	3	11	.	3	89	3
54	.	3	13	3	.	7	.	31	3	.	3	23	113	3	17	3	7	.	.	11
55	.	103	47	.	3	79	3	.	23	3	37	3	.	.	11	7	3	31	3	19
156	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	61	.	3	.	3	29	13	3	11	3
57	19	3	7	3	.	11	.	13	3	.	3	31	43	3	.	3	.	17	.	7
58	11	83	101	.	3	29	3	7	59	3	.	3	.	7	.	.	3	23	3	13
59	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	13	19	3	11	3	59	.	3	17	3
60	7	3	.	3	.	.	.	.	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	.	17
161	31	29	107	11	3	7	3	19	103	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	97
62	3	.	3	71	7	3	.	3	53	.	41	73	3	19	3	7	11	3	43	3
63	83	3	11	3	.	.	13	.	3	7	3	11	.	3	7	3	37	13	19	23
64	.		7	109	3	101	3	43	7	3	.	3	.	53	.	11	3	.	3	7
65	3	.	3	29	.	3	.	3	73	.	11	59	3	7	3	53	47	3	7	3
166	.	3	.	3	.	19	7	79	3	.	3	13	7	3	11	3	.	.	59	.
67	7	11	13	.	3	.	3	41	31	3	19	3	97	13	.	103	3	7	3	107
68	3	19	3	23	13	3	101	3	.	47	7	.	3	.	3	.	7	3	61	3
69	11	3	31	3	7	.	19	71	3	11	3	.	.	3	.	3	13	.	23	89
70	17	.	37	7	3	113	3	13	43	3	.	3	19	11	7	23	3	.	3	.
171	3	17	3	.	131	3	.	3	7	13	89	41	3	.	3	.	.	3	29	3
72	13	3	.	3	41	61	31	7	3	23	3	37	11	3	59	3	.	.	7	.
73	.	7	17	.	3	97	3	11	29	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	127
74	3	31	3	13	19	3	.	3	.	101	.	7	3	.	3	.	.	3	.	3
75	.	3	97	3	17	7	11	.	3	.	3	.	.	3	43	3	7	73	.	.
176	19	127	.	.	3	17	3	.	41	3	11	3	.	.	23	7	3	13	3	11
77	3	41	3	7	.	3	109	3	13	7	29	23	3	.	3	.	.	3	13	3
78	.	3	7	3	53	.	17	107	3	61	3	19	.	3	31	3	.	29	11	7
79	29	13	.	.	3	11	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.	3	19	3	41
180	3	7	3	.	.	3	7	3	17	11	.	101	3	13	3	.	79	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

18101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
181	23	43	19	7	3	59	3	.	.	3	.	3		.	7	11	3	.	3	.
82	3	109	3	131	.	3	.	3	7	.	11	.	3	.	3	13	17	3	71	3
83	.	3	.	3	.	.	13	7	3	73	3	.	23	3	11	3	.	13	7	59
84	.	7	79	41	3	.	3	113	13	3	.	3	7	.	103	.	3	.	3	19
85	3	.	3	83	107	3	.	3		.	97	7	3	43	3	.	.	3	17	3
186	11	3	23	3	37	7	.	43	3	11	3	13	31	3		3	7	103	29	17
87	.	59	13	53	3	.	3	.	97	3	61	3	.	11	41	7	3	.	3	.
88	3	.	3	7	13	3	31	3	11	7	67	19	3	37	3	.	83	3	47	3
89	41	3	7	3	.	.		.	3	127	3	23	11	3	29	3	13	19	.	7
90	.	31	83	.	3	.	3	7	23	3	53	3	.	7	.	79	3	137	3	43
191	3	7	3	97	29	3	7	3	.	13	31	11	3	19	3	.	.	3	41	3
92	7	3	.	3	.	.	11	.	3	47	3	7	.	3	.	3	71	7	19	.
93	.	97	43	.	3	7	3	.	139	3	7	3	13		61	83	3	23	3	11
94	3	.	3	13	7	3	.	3	.	.	.	.	3		3	7	.	3	.	3
95	.	3	.	3	109	13	29	131	3	7	3	59	.	3	7	3	.	.	11	113
196	17	.	7	.	3	11	3	23	7	3	19	3	67	29	73	41	3	13	3	7
97	3	17	3	.	23	3	.	3	13	11	.	109	3	7	3	.	19	3	7	3
98	.	3	29	3	11	.	7	.	3	43	3	79	7	3	83	3	.	.	89	23
99	7	13	17	43	3	.	3	.	11	3	.	3	19	31	.	127	3	7	3	.
200	3	83	3	11	.	3	37	3	.	.	7	.	3	13	3	29	7	3	.	3
201	.	3	.	3	7	.	.	11	3	.	3	.	41	3	13	3	11	.	.	.
02	.	89	11	7	3	17	3	.	73	3	113	3	.	.	7	37	3	31	3	.
03	3	79	3	23	19	3	11	3	7	.	.	29	3	.	3	11	.	3	.	3
04	23	3	.	3	.	137	17	7	3	13	3	31	.	3	107	3	.	.	7	11
05	13	7	.	.	3	73	3	17		3	13	3	7	.	11	19	3	.	3	.
206	3	11	3	37	.	3	53	3	17	41	.	7	3	47	3	.	.	3	11	3
07	127	3	.	3	139	7	.	.	3	17	3	19	.	3	89	3	7	.	.	.
08	11	71	.	.	3	13	3	109	47	3	59	3	37	83	67	7	3	19	3	.
09	3	.	3	7	11	3	13	3	.	7	17	.	3	11	3	.	43	3	.	3
10		3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	17	.	3	109	3	53	11	13	7
211	.	47	.	11	3	43	3	7	.	3	37	3	11	7	23	.	3	.	3	.
12	3	7	3	127	.	3	7	3	.	19	.	13	3	17	3	67	11	3	.	3
13	7	3	11	3	101	.	.	.	3	.	3	7	83	3	19	3	.	7	.	37
14	.	17	.	79	3	7	3	.	31	3	7	3	29	.	13	11	3	41	3	89
15	3	.	3	137	7	3	.	3	.	.	11	.	3	61	3	7	13	3	29	3
216	.	3	17	3		.	.	13	3	7	3	43	97	3	7	3	17	23	.	.
17	.	11	7	17	3	.	3	37	7	3	.	3	31	103	.	.	3	17	3	7
18	3	.	3	113	17	3	.	3	.	139	13	83	3	7	3	.	.	3	7	3
19	11	3	19	3	.	17	7	23	3	11	3	.	7	3	.	3	37	.	17	47
20	7	.	59	13	3	.	3	97	19	3	.	3	.	11	.		3	7	3	17
221	3	23	3	.	.	3	17	3	11	.	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3
22	149	3	53	3	7	97	13	17	3	71	3	.	11	3	37	3	23	13	.	19
23	29	.	.	7	3	53	3	11	13	3	83	3	137	23	7	89	3	.	3	.
24	3	43	3	.	73	3	29	3	7	17	41	11	3		3	19	.	3		3
25	.	3	71	3	.	47	11	7	3	101	3	13	.	3	31	3		.	7	.
226	97	7	13	23	3	.	3	.	.	3	11	3	7	13	.	.	3	.	3	11
27	3	73	3	.	13	3	.	3	.	31	.	7	3	127	3		.	3	23	3
28	151	3	.	3	.	7	.	19	3	29	3	37	17	3	41	3	7	53	11	73
29	.	37	.	31	3	11	3	13	.	3	101	3	23	17	.	7	3	.	3	53
30	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.	3	31	3	.	.	3	19	3
231	13	3	7	3	11	29	.	61	3	19	3	101	.	3	17	3	73	.	79	7
32	.	.	23	.	3	139	3	7	11	3	.	3	13	7	19	17	3	11	3	67
33	3	7	3	11	.	3	7	3	.	83	.	41	3	.	3	.	17	3	37	3
34	7	3	89	3	41	13		11	3	59	3	7	.	3	23	3	11	7		131
35	71	19	11	.	3	7	3	29	43	3	7	3	.	101		.	3	13	3	
236	3	.	3	.	7	3	11	3	13	.	.	.	3		3	7	47	3	13	3
37	137	3	151	3	131	23	37	.	3	7	3	61	19	3	7	3	.	.	.	11
38	.	13	7	29	3	.	3	.	7	3	.	3	.	.	11	31	3	113	3	7
39	3	11	3	.	.	3	.	3	19	47	71	.	3	7	3	37	89	3	7	3
240	.	3	.	3	13	11	7		3	.	3	.	7	3	13	3	29	.	139	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
181	7	3	67	3	11	41	37		3	17	3	7	.	3	13	3	.	7	31	.
82	.	.	.	19	3	7	3	.	11	3	7	3	101	47	.	.	3	11	3	29
83	3	.	3	11	7	3	.	3	.	19	17	.	3	31	3	7	53	3	.	3
84	.	3	.	3	.	37	59	11	3	7	3	17	.	3	7	3	11	.	53	13
85	13	.	7	67	3	19	3	31	7	3	13	3	17	.	.	29	3	.	3	7
186	3	23	3	47	.	3	11	3	.	71	19	.	3	7	3	11	.	3	7	3
87	17	3	.	3	73	29	7	137	3	.	3	89	7	3	.	3	19	.		11
88	7	17	109	.	3	13	3	.	113	3	43	3	79	23	11	13	3	7	3	.
89	3	11	3	.	67	3	13	3	61	.	7	.	3	41	3	17	7	3	11	3
90	.	3	17	3	7	11	23	.	3	.	3	.	.	3	.	3	17	61	13	71
191	11	107	.	7	3	.	3	29	19	3	127	3	.	.	7	31	3	17	3	73
92	3	13	3	.	11	3	.	3	7	.	37	13	3	11	3	.	101	3	23	3
93	37	3	13	3	19	17	107	7	3	.	3	.	.	3	.	3	.	11	7	19
94	53	7	.	11	3	.	3	.	.	3	.	3	7	.	13	.	3	101	3	17
95	3	.	3	.	31	3	17	3	.	23	.	7	3	.	3	19	11	3	.	3
196	43	3	11	3	.	7	71	13	3	103	3	11	.	3	.	3	7	47	.	.
97	.		23	.	3	.	3	53	17	3	.	3	131	73	47	7	3	.	3	13
98	3	.	3	7	.	3	.	3	31	7	11	103	3	59	3	.	.	3	101	3
99	71	3	7	3	.	.	41	19	3	.	3	.	13	3	11	3	.	.	.	7
200	.	11	31	13	3	.	3	7	.	3	17	3	43	7	53	.	3	71	3	101
201	3	7	3	19	.	3	7	3	23	.	.	17	3	.	3	13	61	3	19	3
02	7	3	47	3	.	23	13	.	3	11	3	7	17	3	.	3	103	7	.	53
03	47	.	.	.	3	7	3	.	13	3	7	3	89	11	19	.	3		3	.
04	3	113	3	41	7	3	97	3	11	59	.	.	3	.	3	7	31	3	103	3
05	.	3	61	3	29	.	131	67	3	7	3	13	11	3	7	3	59	.	43	.
206	107	19	7	73	3	.	3	11	7	3	23	3	.	13	137	17	3	.	3	7
07	3	.	3	.	13	3	19	3	.	.	79	11	3	7	3	.	17	3	7	3
08	29	3	.	3	23	31	7	41	3		3	.	7	3	.	3	13	17	.	.
09	7	23	19	.	3	.	3	13	67	3	11	3	.	.	31	139	3	7	3	11
10	3	37	3	.	.	3	.	3	19	13	7	107	3	29	3	.	7	3	17	3
211	13	3	.	3	7	.	61	.	3	31	3	.	59	3	.	3	.	.	11	17
12	79	53	29	7	3	11	3	.	89	3	.	3	13	.	7	61	3	107	3	19
13	3	131	3	13	41	3	23	3	7	11	.	.	3	.	3	73	.	3	.	3
14	19	3	43	3	11	13	.	7	3	109	3	47	.	3	.	3	.	.	7	.
15	23	7	.	.	3	.	3	.	11	3	.	3	7	113	.	.	3	11	3	.
216	3	59	3	11	.	3	47	3	13	.	53	7	3	.	3	23	109	3	13	3
17	.	3	.	3	47	7	.	11	3	.	3	29	23	3	.	3	7	19	71	.
18	.	13	11	.	3	.	3	19	.	3	131	3	.	79	43	7	3	.	3	61
19	3	29	3	7	.	3	11	3	127	7	.	31	3	13	3	11	.	3	.	3
20	.	3	7	3	13	.	.	29	3	.	3	.	71	3	13	3	.	.	19	7
221	17	.	.	.	3	37	3	7	.	3	67	3	41	7	11	.	3	.	3	79
22	3	7	3	.	113	3	7	3	.	.	.	.	3	.	3	31	.	3	11	3
23	7	3	79	3	59	11	.	.	3	13	3	7	.	3	61	3	.	7	.	13
24	11	.	17	37	3	7	3	.	23	3	7	3	.	.	113	43	3	83	3	149
25	3	19	3	17	7	3	.	3	.	.	107	67	3	11	3	7	19	3	59	3
226	.	3	139	3	17	131	19	.	3	7	3	.	37	3	7	3	.	11	.	.
27	.	61	7	11	3	13	3	.	7	3	.	3	11	.	.	13	3	23	3	7
28	3	.	3	.	.	3	13	3	.	89	.	137	3	7	3	47	11	3	7	3
29	59	3	11	3	.	.	7	103	3	.	3	11	7	3	127	3	83	.	13	109
30	7	.	.	.	3	.	3	17	.	3	47	3	.	41	.	11	3	7	3	.
231	3	13	3	.	19	3	.	3	17	.	7	13	3	97	3	.	7	3	.	3
32	.	3	13	3	7	43	53	.	3	17	3	.	31	3	11	3	.	.	.	23
33	19	11	.	7	3	61	3	.	.	3	97	3	103	67	7	19	3	149	3	.
34	3	47	3	.	29	3	31	3	7	.	17	53	3	23	3	83	13	3	.	3
35	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	17	.	3	103	3	31	.	7	
236	67	7	41	59	3	.	3	.		3	.	3	7	11	.	.	3	19	3	13
37	3	.	3	23	.	3	.	3	11	.	13	7	3	17	3	.	37	3	53	3
38	17	3	.	3	107	7	29	.	3	.	3	.	11	3	.	3	7	.	23	.
39	43	17	.	13	3	31	3	11	.	3	.	3	.	29	17	7	3	.	3	103
240	3	67	3	7	.	3	41	3		7		11	3		3	13	.	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

24 101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
241	7	.	.	.	3	.	3	89	.	3	23	3	59	.	.	101	3	7	3	19
42	3	.	3	43	11	3	61	3	53	.	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3
43	19	3	109	3	7	41	.	83	3	13	3	.	29	3	.	3	101	11	97	13
44	13	23	.	7	3	.	3		.	3	13	3	11	53	7	.	3	.	3	23
45	3	107	3	.	127	3	.	3	7	137	.	19	3	.	3	53	11	3	.	3
246	73	3	11	3	.	151	103	7	3	.	3	11	.	3	71	3	41	19	7	157
47	17	7	31	.	3	13	3	19	59	3	79	3	7	.	29	11	3	109	3	
48	3	17	3	.	43	3	13	3	.	103	11	7	3	19	3	59	.	3	.	3
49	37	3	.	3	29	7	.	.	3	.	3	97	107	3	11	3	7	.	13	61
50	23	11	17	89	3	.	3	127	131	3	29	3	.	.	.	7	3	79	3	37
251	3	13	3	7	.	3	.	3	.	7	.	13	3	41	3	23	31	3	.	3
52	11	3	7	3	17	19	151	.	3	11	3	.	23	3	.	3	43	.	.	7
53	.	.	.	.	3	17	3	7	.	3	19	3	73	7	13	.	3	.	3	.
54	3	7	3	.	.	3	7	3	11	.	47	59	3	29	3	.	13	3	.	3
55	7	3	23	3	97	31	17	13	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	59	29
256	.	.	29	.	3	7	3	11	.	3	7	3	19	.	31	.	3	.	3	13
57	3	.	3	47	7	3	.	3	17	29	13	11	3	.	3	7	.	3	.	3
58	.	3	131	3	53	83	11	.	3	7	3	23	13	3	7	3	.	43	.	.
59	59	.	7	13	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	37	.	3	.	3	7
60	3	.	3	31	19	3	.	3	.	53	17	.	3	7	3	13	.	3	7	3
261	43	3	.	3	.	.	7	.	3	151	3	17	7	3	59	3	.	13	11	79
62	7	.	73	.	3	11	3	157	13	3		3	17	37	.	19	3	7	3	.
63	3	29	3	.	83	3	.	3	.	11	7	113	3	17	3	.	7	3	.	3
64	17	3	.	3	7	61	.	29	3	.	3	13	.	3		3	137	31	53	.
65	.	17	13	7	3	.	3	23	11	3	41	3	43	13	7	.	3	11	3	139
266	3	37	3	11	13	3	43	3	7	79	.	31	3	.	3	17	.	3	.	3
67	.	3	17	3	.	.	.	7	3	.	3		.	3	.	3	11	47	7	23
68	.	7	11	17	3	.	3	13	.	3	139	3	7	.	47	.	3	17	3	.
69	3	.	3	71	17	3	11	3	.	13	.	7	3	23	3	11	29	3	.	3
70	13	3	113	3	.	7	.	41	3	61	3	151	.	3	19	3	7	.	17	11
271	41	.	.	.	3	19	3	47	37	3	.	3	13	43	11	7	3	.	3	17
72	3	11	3	7	.	3	17	3	163	7	19	73	3	113	3	.	.	3	11	3
73	23	3	7	3	31	11	59	17	3	89	3	.	151	3	.	3	19	37	23	7
74	11	67	.	.	3	79	3	7	17	3	.	3	.	7	.	23	3	13	3	.
75	3	7	3	.	11	3	7	3	13	17	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3
276	7	3	19	3	.	53	.	71	3	23	3	7	.	3	29	3	131	7	.	43
77	.	13	103	11	3	7	3	53	19	3	7	3	11	.	.	.	3	.	3	.
78	3	.	3	.	7	3	.	3	43	.	.	17	3	13	3	7	11	3	.	3
79	.	3	11	3	13	103	.	.	3	7	3	11	17	3	7	3	.	.	.	19
80	.	41	7	37	3	109	3	.	7	3	.	3	.	17	23	11	3	29	3	7
281	3	157	3	.	.	3	31	3	61	.	11	23	3	7	3	19	107	3	7	3
82	.	3	67	3	.	89	7	.	3	13	3	.	7	3	11	3	31	61	47	13
83	7	11	.	.	3	23	3	.	127	3	13	3	41	29	43	17	3	7	3	.
84	3	.	3	.	.	3	157	3	97	43	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3
85	11	3	29	3	7	.	.	19	3	11	3	47	103	3	.	3	.	17	.	.
286	37	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	.	.	11	7	13	3	.	3	.
87	3	.	3	19	.	3	13	3	7	.	23	.	3	59	3	29	41	3	17	3
88	83	3	.	3	47	.	.	7	3	19	3	127	11	3	.	3	151	.	7	17
89	.	7	137	.	3	29	3	11	.	3	.	3	7	.	19	43	3	103	3	.
90	3	13	3	.	67	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	71	113	3	31	3
291	.	3	13	3	43	7	11	37	3	.	3	.	.	3	.	3	7	151	.	103
92	.	19	.	.	3	131	3	61	.	3	11	3	.	23	13	7	3	.	3	11
93	3	.	3	7	.	3	19	3	109	7	.	139	3	.	3	.	13	3	.	3
94	.	3	7	3	.	67	23	13	3		3	.	19	3	.	3	59	.	11	7
95	.	163	19	23	3	11	3	7	53	3	.	3	.	7	.	109	3	31	3	13
296	3	7	3	29	.	3	7	3	19	11	13	.	3	.	3	107	.	3	23	3
97	7	3	61	3	11	43	.	113	3	.	3	7	13	3	131	3	.	7	151	71
98	17	.	41	13	3	7	3	.	11	3	7	3	23	.	.	53	3	11	3	19
99	3	17	3	11	7	3	.	3	.	23	.	173	3	37	3	7	79	3	.	3
300	19	3	37	3	.		13	11	3	7	3	.	59	3	7	3	11	13	.	151
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
241	.	3	7	3	37	73	11	.	3	23	3	.	.	3	19	3	17	13	.	7
42	.	79	127	17	3	19	3	7	13	3	11	3	.	7	149	107	3	17	3	11
43	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	19	.	3	37	3	29	.	3	31	3
44	7	3	37	3	61	17	43	.	3	.	3	7	.	3	47	3	19	7	11	.
45	.	43	13	41	3	7	3	79	.	3	7	3	47	13	23	67	3	.	3	17
246	3	89	3	.	7	3	17	3	.	11	.	23	3	.	3	7	.	3	.	3
47	53	3	19	3	11	.	.	17	3	7	3	71	.	3	7	3	13	.	137	.
48	.	29	7	.	3	23	3	13	7	3	.	3	139	149	41	.	3	11	3	7
49	3	.	3	11	109	3	.	3	.	13	.	.	3	7	3	.	67	3	7	3
50	13	3	.	3	19	71	7	11	3	.	3	31	7	3	.	3	11	23	.	19
251	7	.	11	139	3	.	3	.	.	3	17	3	13	.	89	.	3	7	3	113
52	3	.	3	13	.	3	11	3	37	127	7	17	3	131	3	11	7	3	41	3
53	101	3	.	3	7	13	.	23	3	.	3	41	17	3	53	3	.	67	109	11
54	31	.	.	7	3	.	3	.	.	3	73	3	83	17	7	71	3	13	3	43
55	3	11	3	61	.	3	37	3	7	107	.	.	3	.	3	.	157	3	11	3
256	113	3	.	3	67	11	.	7	3	.	3		61	3	17	3	23	.	7	31
57	11	7	43	.	3	.	3	73	.	3	149	3	7	19	107	17	3	.	3	.
58	3	103	3	19	11	3	.	3	41	.	113	7	3	11	3	.	17	3	19	3
59	.	3	101	3	13	7	23		3	19	3	83	.	3	13	3	7	11	.	.
60	109	.	71	11	3	67	3	131	29	3	89	3	11	.	19	7	3	97	3	.
261	3	.	3	7	.	3	137	3	.	7	.	47	3	.	3	.	11	3	7	3
62	.	3	7	3	.	.	.	109	3	13	3	11	41	3	97	3	61	.	.	7
63	13	19	.	43	3	41	3	7	.	3	13	3	23	7	.	11	3	.	3	.
64	3	7	3	.	47	3	7	3	103	23	11	.	3	71	3	.	59	3	.	3
65	7	3	.	3	.	101	31	163	3	.	3	7	19	3	11	3	.	7	.	67
266	29	11	19	53	3	7	3	.	149	3	7	3	.	.	.	13	3	.	3	.
67	3	31	3	.	7	3	13	3	19	41	.	61	3	.	3	7	73	3	127	3
68	11	3	107	3	.	.	67	97	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	13	37
69	.	.	7	.	3	59	3	149	7	3	53	3	.	11	.	137	3	.	3	7
70	3	13	3	.	.	3	.	3	11	.		13	3	7	3	103	.	3	7	3
271	19	3	13	3	157	23	7	101	3	29	3	.	7	3	31	3	.	71	.	59
72	7	.	97	.	3	137	3	11	.	3	.	3	.	.	13	29	3	7	3	.
73	3	17	3	109	.	3	.	3	101	31	7	11	3	139	3	61	7	3	.	3
74	97	3	.	3	7	29	11	13	3	83	3	.	.	3	.	3	37	19	31	107
75	.	59	17	7	3	43	3	19	79	3	11	3	.	.	7	47	3	41	3	11
276	3	.	3	17	139	3	73	3	7	.	13	89	3	19	3	.	.	3	.	3
77	.	3	41	3	17	.	.	7	3	.	3	.	13	3	37	3	.	.	7	.
78	.	7	89	13	3	11	3	29	47	3	61	3	7	.	79	167	3	.	3	23
79	3	.	3	73	.	3	.	3	83	11	101	7	3	.	3	13	23	3	.	3
80	.	3	.	3	11	7	13	.	3	67	3	43	.	3	.	3	7	13	.	.
281	.	47	37	29	3	.	3	17	11	3	19	3		.	71	7	3	11	3	163
82	3	19	3	7	59	3	23	3	17	7	.	.	3	.	3	.	19	3	.	3
83	.	3	7	3	79	113	19	11	3	17	3	13	101	3	.	3	11	.	73	7
84	23	37	11	149	3	.	3	7	71	3	.	3	19	7	61	31	3	.	3	.
85	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	17	.	3	101	3	11	.	3	.	3
286	7	3	.	3	.	.	109	.	3	53	3	7	23	3	.	3	13	7	.	11
87	.	.	149	.	3	7	3	13	.	3	7	3	17	107	11	.	3	.	3	31
88	3	11	3	.	7	3	.	3	.	13	67	.	3	17	3	7	167	3	11	3
89	13	3	23	3	.	11	83	59	3	7	3	.	73	3	7	3	53	79	107	47
90	11	17	7	.	3	.	3	41	7	3	.	3	13	127	17	19	3	47	3	7
291	3	.	3	13	11	3	.	3	31	.	163		3	7	3	17	.	3	7	3
92	.	3	17	3	29	13	7	.	3	73	3	19	7	3	.	3	17	11	.	83
93	7	149	31	11	3	.	3	43	23	3	29	3	11	.	.	.	3	7	3	.
94	3	.	3	89	17	3	79	3	13	.	7	41	3	.	3	37	7	3	13	3
95	29	3	11	3	7	17	.	.	3	.	3	11	.	3	.	3	127	101	17	.
296	149	13	47	7	3	.	3	.	.	3	59	3	67	.	7	11	3	23	3	17
97	3	.	3	.	.	3	17	3	7	19	11	97	3	13	3	.	31	3	83	3
98	.	3	73	3	13	.	.	7	3	.	3	.	.	3	11	3	71	167	7	29
99	61	7	29	.	3	19	3	23	17	3	31	3	7	.	157	.	3	89	3	131
300	3	41	3	.	23	3	107	3	.	17	19	7	3	67	3	.	.	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

30101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
301	31	.	7	.	3	.	3		7	3	47	3	29	.	.	.	3	43	3	7
02	3	.	3	17	.	3	11	3	47	.	167	19	3	7	3	11	.	3	7	3
03	157	3	.	3	17	.	7	.	3	.	3	13	7	3	23	3	.	19	.	11
04	7	.	13	47	3	17	3	19	29	3	.	3	.	13	11	61	3	7	3	.
05	3	11	3	.	13	3	.	3	23	131	7	.	3	19	3	.	7	3	11	3
306	71	3	127	3	7	11	17	67	3	113	3	109	.	3	.	3	13	.	19	.
07	11	.	.	7	3	.	3	13	31	3	.	3	79	73	7	59	3	71	3	97
08	3	.	3	.	11	3	.	3	7	13	29	.	3	11	3	.	.	3	109	3
09	13	3	31	3	.	19	43	7	3	17	3	157	.	3	.	3	.	11	7	.
10	29	7	101	11	3	.	3	.	67	3	19	3	7	.	41	.	3	37	3	61
311	3	19	3	13	53	3	29	3	.	.	17	7	3	163	3	.	11	3	.	3
12	41	3	11	3	23	7	19	.	3	.	3	11	.	3	.	3	7	157	.	.
13	113	23	.	131	3	173	3	.	.	3	.	3	17	.	.	7	3	13	3	23
14	3	31	3	7	101	3	89	3	13	7	11	53	3	17	3	149	23	3	13	3
15	17	3	7	3	.	.	.	43	3	29	3	41	.	3	11	3	.	.	.	7
316	.	11		73	3	101	3	7	103	3	.	3	47	7	17	29	3	.	3	.
17	3	7	3	37	19	3	7	3	.	.	.	.	3	13	3	17	.	3	53	3
18	7	3	17	3	13	29	.	47	3	11	3	7	139	3	13	3	17	7	.	.
19	19	61	.	17	3	7	3	59	137	3	7	3	37	11	109	19	3	17	3	43
20	3	.	3	.	7	3	101	3	11	31	.	.	3	103	3	7	179	3	73	3
321	47	3	97	3	163	17	.	.	3	7	3	19	11	3	7	3	.	.	17	13
22	13	.	7	31	3	.	3	11	7	3	13	3	167	.	.	103	3	19	3	7
23	3	.	3	.	79	3	17	3	.	.	.	11	3	7	3	73	.	3	7	3
24	.	3	23	3	.	.	7	17	3	.	3	.	7	3	163	3	.	.	71	37
25	7		.	19	3	13	3	31	17	3	11	3	.	.	.	13	3	7	3	11
326	3	.	3	.	.	3	13	3	.	17	7	67	3	.	3	127	7	3	.	3
27	53	3	.	3	7	.	.	.	3	43	3	23	71	3	19	3	29	137	11	.
28	.	.	53	7	3	11	3	37	23	3	17	3	.	.	7	.	3	.	3	107
29	3	13	3	.	.	3	.	3	7	11	19	13	3	.	3	.	.	3	47	3
30	61	3	13	3	11	.	137	7	3	.	3	.	17	3	.	3	19	173	7	.
331	79	7	.	113	3	.	3	.	11	3	157	3	7	17	13	31	3	11	3	.
32	3	.	3	11	.	3	59	3	139	.	149	7	3	167	3	43	13	3	.	3
33	.	3	19	3	.	7	.	11	3	47	3	.	.	3	17	3	7	.	.	.
34	127	.	11	.	3	.	3	23	19	3	.	3	101	67	29	7	3	53	3	13
35	3	.	3	7	23	3	11	3	.	7	13	.	3	.	3	11	17	3	.	3
336	.	3	7	3	19	.	.	.	3	.	3	.	13	3	.	3	.	17	.	7
37	67	.	37	13	3	.	3	7	.	3	29	3	89	7	11	.	3	41	3	.
38	3	7	3	.	.	3	7	3	31	149	.	.	3	23	3	13	43	3	11	3
39	7	3	41	3	.	11	13	107	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	83	17
40	11	37	31	71	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	101	.	3	59	3	79
341	3	67	3	23	7	3	109	3	149	.	.	.	3	11	3	7	.	3	.	3
42	23	3	79	3	.		.	19	3	7	3	13	.	3	7	3	97	11	23	29
43	.	.	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3	11	13	.	23	3	61	3	7
44	3	.	3	19	13	3	127	3	.	29	173	.	3	7	3	.	11	3	7	3
45	.	3	11	3	.	.	7	.	3	19	3	11	7	3	.	3	13	.	179	.
346	7	.	.	53	3	.	3	13	89	3	31	3	.	59	19	11	3	7	3	.
47	3	.	3	61	103	3	149	3	.	13	7	.	3	47	3	.	7	3	.	3
48	13	3	.	3	7	31	37	.	3	97	3	29	61	3	11	3	.	.	.	.
49	17	11	67	7	3	.	3	.	47	3	53	3	13	181	7	.	3	83	3	.
50	3	17	3	13	157	3	19	3	7	.	.	23	3	53	3	37	67	3	101	3
351	11	3	.	3	.	13	.	7	3	11	3	.	19	3	41	3	.	113	7	.
52	.	7	17	137	3	23	3	41	.	3	.	3	7	11	167	131	3	13	3	101
53	3	43	3	17	.	3	.	3	11	.	.	7	3	89	3	.	59	3	13	3
54	.	3		3	17	7	107	.	3	.	3	71	11	3	.	3	7	23	.	.
55	131	13	.	.	3	17	3	11	.	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	19
356	3	.	3	7	149	3	.	3	179	7	23	11	3	13	3	157	29	3	43	3
57	19	3	7	3	13	71	11	23	3	139	3	.	.	3	13	3	103	31	.	7
58	.	.	61	.	3	59	3	7	113	3	11	3	.	7	.	.	3	73	3	11
59	3	7	3	149	.	3	7	3	17	.	37	19	3	.	3	83	127	3	103	3
360	7	3	.	3	.	.	.	181	3	13	3	7	137	3	.	3	23	7	11	13
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
301	11	3	53	3	.	7	97	.	3	11	3	103	.	3	.	3	7	109	.	13
02	13	.	79	.	3	53	3	.	.	3	13	3	107	11	31	7	3	.	3	41
03	3	127	3	7	97	3	.	3	11	7	37	17	3	23	3	.	.	3	113	3
04	37	3	7	3	83	41	.	.	3	31	3	29	11	3	43	3	.	.	.	7
05	137	.	.	.	3	13	3	7	19	3	.	3	53	7	73	13	3	.	3	37
306	3	7	3	23	.	3	7	3	.	37	.	11	3	61	3	.	47	3	.	3
07	7	3	.	3	19	.	11	29	3	.	3	7	.	3	17	3	41	7	13	19
08	.	.	59	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	89	67	17	3	.	3	11
09	3	13	3	83	7	3	173	3	.	47	.	13	3	.	3	7	17	3	139	3
10	.	3	13	3	89	.	47	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	17	11	137
311	.	.	7	.	3	11	3	71	7	3	.	3	.	.	13	.	3	.	3	7
12	3	.	3	.	43	3	.	3	.	11	.	31	3	7	3	67	13	3	7	3
13	107	3	.	3	11	79	7	13	3	137	3	.	7	3	.	3	.	.	.	17
14	7	71	83	163	3	73	3	.	11	3	.	3	.	19	23	.	3	7	3	13
15	3	139	3	11	37	3	.	3	131	.	7	23	3	.	3	31	7	3	19	3
316	31	3	.	3	7	.	.	11	3	19	3	79	13	3	.	3	11	41	29	.
17	.	113	11	7	3	23	3	.	.	3	43	3	61	37	7	83	3	.	3	.
18	3	53	3	.	151	3	11	3	7	.	127	71	3	.	3	11	.	3	167	3
19	89	3	.	3	31	.	13	7	3	.	3	113	.	3	29	3	.	13	7	11
20	.	7	.	.	3	.	3	.	13	3	.	3	7	.	11	.	3	67	3	.
321	3	11	3	.	29	3	19	3	53	.	23	7	3	.	3	.	.	3	11	3
22	.	3	.	3	.	7	41	23	3	59	3	13	19	3	83	3	7	43	.	.
23	11	.	13	.	3	.	3	.	.	3	.	3	.	13	139	7	3	29	3	179
24	3	17	3	7	11	3	.	3	19	7	47	.	3	11	3	53	.	3	.	3
25	43	3	7	3	.	.	29	.	3	.	3	.	31	3	.	3	13	11	37	7
326	103	.	17	11	3	89	3	7	37	3	41	3	11	7	.	97	3	.	3	19
27	3	7	3	17	181	3	7	3	.	13	73	.	3	.	3	.	11	3	.	3
28	7	3	11	3	17	59	23	.	3	71	3	7	131	3	.	3	31	7	67	167
29	83	31	.	23	3	7	3	.	.	3	7	3	13	.	.	11	3	.	3	.
30	3	.	3	13	7	3	43	3	.	.	11	19	3	.	3	7	.	3	23	3
331	.	3	71	3	.	13	17	41	3	7	3	.	.	3	7	3	.	19	89	.
32	41	11	7	79	3	29	3	17	7	3	107	3	23	83	.	.	3	13	3	7
33	3	.	3	.	73	3	61	3	13	23	.	29	3	7	3	173	.	3	7	3
34	11	3	.	3	.	109	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	107	.	19	139
35	7	13	23	37	3	.	3	.	59	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	.
336	3	73	3	97	41	3	131	3	11	151	7	.	3	13	3	59	7	3	31	3
37	.	3	.	3	7	19	.	.	3	.	3	17	11	3	13	3	.	47	.	73
38	.	97	.	7	3	.	3	11	.	3	19	3	17	31	7	.	3	.	3	109
39	3	19	3	29	.	3	.	3	7	53	61	11	3	17	3	41	19	3	.	3
40	17	3	.	3	.	23	11	7	3	13	3	53	173	3	89	3	73	103	7	13
341	13	7	.	.	3	127	3	47	.	3	11	3	7	.	17	179	3	31	3	11
42	3	.	3	.	.	3	.	3	43	.	151	7	3	.	3	17	53	3	.	3
43	.	3	17	3	.	7	.	.	3	37	3	31	.	3	137	3	7	163	11	41
44	47	131	.	17	3	11	3	.	.	3	23	3	29	.	.	7	3	17	3	.
45	3	109	3	7	17	3	13	3	181	7	71	151	3	.	3	.	.	3	29	3
346	.	3	7	3	11	17	.	37	3	.	3	.	79	3	.	3	113	.	13	7
47	19	23	.	.	3	.	3	7	11	3	83	3	.	7	43	19	3	11	3	17
48	3	7	3	11	71	3	7	3	.	43	.	13	3	.	3	139	23	3	.	3
49	7	3	13	3	.	.	73	11	3	41	3	7	.	3	59	3	11	7	79	31
50	.	.	11	.	3	7	3	.	17	3	7	3	.	.	13	.	3	19	3	.
351	3	.	3	.	7	3	11	3	.	17	29	127	3	151	3	7	13	3	61	3
52	.	3	.	3	37	179	.	13	3	7	3	.	.	3	7	3	.	29	47	11
53	23	.	7	19	3	.	3	113	7	3	17	3	.	41	11	43	3	.	3	7
54	3	11	3	59	.	3	29	3	79	19	13	17	3	7	3	23	.	3	7	3
55	73	3	31	3	43	11	7	.	3	.	3	47	7	3	19	3	.	.	.	97
356	7	101	181	13	3	19	3	53	.	3	.	3	31	17	127	89	3	7	3	29
57	3	.	3	.	11	3	47	3	.	83	7	37	3	11	3	13	7	3	.	3
58	.	3	23	3	7	.	13	.	3	29	3	.	53	3	17	3	19	11	.	.
59	.	157	41	7	3	.	3	.	13	3	.	3	11	.	7	17	3	.	3	.
360	3	31	3	107	.	3	.	3	7	.	43	109	3	.	3	151	11	3	.	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

36 101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
361	13	79	.	.	3	7	3	19	41	3	7	3	.	23	.	71	3	47	3	37
62	3	41	3	.	7	3	.	3	29	11	17	.	3	19	3	7	.	3	67	3
63	31	3	.	3	11	.	23	.	3	7	3	17	47	3	7	3	.	.	19	163
64	89	59	7	23	3	13	3	79	7	3	73	3	17	.	83	13	3	11	3	7
65	3	173	3	11	29	3	13	3	59	.	.	.	3	7	3	61	.	3	7	3
366	17	3	.	3	31	19	7	11	3	53	3	.	7	3	.	3	11	.	13	67
67	7	17	11	.	3	.	3	73	.	3	19	3	23	109	17	.	3	7	3	.
68	3	13	3	.	131	3	11	3	.	23	7	13	3	.	3	11	7	3	.	3
69	.	3	13	3	7	.	19	.	3	.	3	.	.	3	43	3	17	.	.	11
70	163	.	23	7	3	.	3	.	.	3	61	3	19	29	7	.	3	17	3	.
371	3	11	3	43	17	3	.	3	7	.	137	107	3	71	3	.	13	3	11	3
72	.	3	29	3	127	11	.	7	3	.	3	59	31	3	23	3	167	.	7	193
73	11	7	.	.	3	.	3	67	.	3	163	3	7	37	.	.	3	107	3	13
74	3	113	3	.	11	3	17	3	23	.	13	7	3	11	3	29	.	3	.	3
75	.	3	.	3	.	7	.	17	3	157	3	.	13	3	.	3	7	11	.	.
376	19	31	.	11	3	29	3	.	17	3	191	3	11	.	61	7	3	.	3	.
77	3	37	3	7	43	3	.	3	67	7	31	29	3	97	3	13	11	3	.	3
78	103	3	7	3	.	.	13	59	3	109	3	11	.	3	157	3	79	13	.	7
79	151	29	.	167	3	31	3	7	13	3	17	3	83	7	59	11	3	19	3	137
80	3	7	3	191	.	3	7	3	193	47	11	17	3	73	3	.	109	3	.	3
381	7	3	53	3	23	.	47	.	3	67	3	7	17	3	11	3	43	7	37	.
82	.	11	13	19	3	7	3	.	37	3	7	3	.	13	.	.	3	167	3	23
83	3	.	3	29	7	3	.	3	.	19	.	.	3	.	3	7	23	3	31	3
84	11	3	193	3	71	107	41	103	3	7	3	83	.	3	7	3	13	37	.	.
85	.	139	7	97	3	19	3	13	7	3	59	3	53	11	89	17	3	.	3	7
386	3	.	3	.	.	3	23	3	11	13	19	.	3	7	3	.	17	3	7	3
87	13	3	.	3	.	.	7	31	3	.	3	.	7	3	.	3	19	17	.	.
88	7	.	151	197	3	37	3	11	.	3	41	3	13	.	71	.	3	7	3	53
89	3	.	3	13	167	3	.	3	.	.	7	11	3	.	3	23	7	3	17	3
90	43	3	19	3	7	13	11	.	3	.	3	31	23	3	103	3	.	.	.	17
391	61	.	.	7	3	.	3	.	19	3	11	3	109	.	7	.	3	13	3	11
92	3	197	3	.	113	3	.	3	7	61	.	.	3	.	3	.	.	3	13	3
93	.	3	23	3	19	.	.	7	3	.	3	67	37	3	139	3	.	.	7	19
94	31	7	157	.	3	11	3	.	79	3	89	3	7	47	113	.	3	.	3	103
95	3	.	3	.	.	3	43	3	.	11	29	7	3	13	3	19	.	3	71	3
396	199	3	.	3	11	7	173	.	3	.	3	23	.	3	13	3	7	29	41	31
97	29	.	59	.	3	151	3	.	11	3	.	3	67	.	79	7	3	11	3	.
98	3	53	3	7	41	3	29	3	.	7	.	.	3	61	3	.	.	3	.	3
99	.	3	7	3	107	167	179	11	3	13	3	.	73	3	.	3	11	59	43	7
400	13	109	11	.	3	.	3	7	31	3	13	3	.	7	.	.	3	23	3	29
401	3	7	3	19	.	3	7	3	53	.	.	.	3	67	3	11	137	3	19	3
02	7	3	31	3	79	.	131	37	3	19	3	7	.	3	.	3	.	7	167	11
03	191	41	17	173	3	7	3	23	61	3	7	3	31	53	11	13	3	.	3	157
04	3	11	3	17	7	3	13	3	83	.	.	.	3	.	3	7	37	3	11	3
05	101	3	.	3	17	11	31	.	3	7	3	.	.	3	7	3	71	.	13	23
406	11	19	7	.	3	17	3	151	7	3	.	3	41	179	.	.	3	97	3	7
07	3	13	3	.	11	3	19	3	43	193	139	13	3	7	3	.	131	3	7	3
08	.	3	13	3	37	.	7	.	3	.	3	.	7	3	97	3	.	11	.	.
09	7	.	19	11	3	163	3	17	151	3	.	3	11	.	13	.	3	7	3	.
10	3	131	3	23	.	3	.	3	17	.	7	89	3	37	3	.	7	3	.	3
411	23	3	11	3	7	.	.	13	3	17	3	11	.	3	31	3	.	.	23	.
12	.	.	89	7	3	.	3	47	.	3	.	3	.	.	7	11	3	.	3	13
13	3	103	3	101	109	3	79	3	7	31	11	37	3	.	3	67	.	3	173	3
14	19	3	47	3	.	.	83	7	3	23	3	17	13	3	11	3	29	.	7	181
15	47	7	.	13	3	.	3	.	.	3	131	3	7	41	73	.	3	.	3	.
416	3	.	3	.	.	3	.	3	.	107	.	7	3	17	3	13	.	3	.	3
17	11	3	179	3	53	7	13	.	3	11	3	.	29	3	.	3	7	13	109	83
18	.	17	97	.	3	.	3	19	13	3	151	3	59	11	17	7	3	.	3	.
19	3	.	3	7	.	3	167	3	11	7	.	23	3	19	3	17	.	3	.	3
420	97	3	7	3	43	.	.	.	3	.	3	13	11	3	127	3	17	.	19	7
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
361	.	3	11	3	.	29	59	7	3	61	3	11	97	3		3		17	7	53
62		7	13	101	3	.	3		19	3		3	7	13	131	11	3		3	
63	3		3	103	13	3	41	3	37	.	11	7	3		3		151	3	17	3
64		3		3	19	7		.	3		3		19	3	11	3	7			17
65	.	11	139	.	3	.	3	13	.	3	79	3	157	.	.	7	3	23	3	
366	3	.	3	7	61	3	37	3	.	7		43	3		3	19		3	.	3
67	11	3	7	3	.	97		83	3	11	3	.		3		3		.	31	7
68	3	137	.	29	3	191	3	7	.	3	.	3	13	7		37	3	79	3	
69	3	7	3	13	23	3	7	3	11		103		3	31	3	47	71	3		3
70	7	3	.	3	.	13	101	19	3	131	3	7	11	3	.	3	29	7	.	23
371	97	53	73		3	7	3	11	.	3	7	3		19	41		3	13	3	.
72	3		3	19	7	3	83	3	13			11	3	23	3	7	89	3	13	3
73	41	3		3	.		11		3	7	3	.	29	3	7	3	139	61		149
74	17	13	7	47	3	.	3	89	7	3	11	3	37		19		3	.	3	7
75	3	17	3	23	.	3	.	3		.	53		3	7	3		.	3	7	3
376	23	3		3	13	.	7	139	3	101	3	41	7	3	13	3	.		11	
77	7	19	17	61	3	11	3	179	107	3	37	3	.		29	23	3	7	3	
78	3		3	17		3	19	3		11	7		3	43	3		7	3		3
79	.	3	.	3	7		.	43	3	13	3	163	19	3	.	3				13
80	13	.	19	7	3	17	3		11	3	13	3	113		7	41	3	11	3	31
381	3	.	3	11	31	3		3	7	59		73	3	.	3		181	3		3
82	29	3	67	3		83	17	7	3		3	101		3		3	11	149	7	
83	.	7	11	89	3	13	3	17	.	3		3	7	131	13	13	3		3	19
84	3		3			3	11	3	17	79	109	7	3	29	3	11	61	3	137	3
85	19	3	.	3	.	7			3	17	3	173	41	3	47	3	7	.	13	11
386	.	.	29	67	3	23	3			3		3	47	101	11	7	3		3	
87	3	11	3	7	83	3		3	137	7	17	13	3	.	3	79		3	11	3
88	.	3	7	3		11		47	3		3	17	59	3	37	3	.	19	97	7
89	11		163		3	47	3	7		3		3	17	7	13	127	3	.	3	59
90	3	7	3	139	11	3	7	3	89	41	23		3	11	3	.	13	3		3
391	7	3		3			53	13	3	43	3	7		3	149	3	.	7	19	.
92		17	37	11	3	7	3	107	173	3	7	3	11	163	17	101	3	.	3	13
93	3	23	3	.	7	3	.	3			13	53	3	.	3	7	11	3	.	3
94		3	11	3	.	19	61	29	3	7	3	11	13	3	7	3	17	73	127	.
95		37	7	13	3		3		7	3	19	3	.	23	31	11	3	17	3	7
396	3	19	3	.	17	3	.	3		97	11		3	7	3	13	19	3	7	3
97	127	3	83	3	.	17	7		3	31	3		7	3	11	3		13	17	.
98	7	11		23	3		3		13	3		3	19			113	3	7	3	17
99	3		3	31	89	3	17	3		71	7	.	3		3		7	3	23	3
400	11	3	41	3	7	.	103	17	3	11	3	13	149	3		3	47	.	101	.
401			13	7	3		3		17	3		3	23	11	7		3	.	3	61
02	3		3	127	13	3	67	3	7	17	.	47	3		3	.	43	3	59	3
03		3	.	3		181	37	7	3	47	3	149	11	3		3	13	31	7	71
04	19	7	23		3	43	3	11		3	17	3	7		.	19	3	.	3	
05	3	107	3	.	47	3	113	3	29	13	.	7	3	.	3	37		3	.	3
406	13	3	109	3	73	7	11	67	3	89	3	19	17	3	23	3	7		.	.
07		83	53		3		3	59	.	3	11	3	13	17		7	3	19	3	11
08	3	.	3	7	29	3	.	3	23	7	41	.	3	.	3	31	103	3	.	3
09	31	3	7	3		13	71	53	3	.	3	43	107	3	17	3	179		11	7
10	.	61		19	3	11	3	7	67	3	.	3	.	7	181	17	3	13	3	73
411	3	7	3	79	.	3	7	3	13	11	.	.	3	.	3	.	17	3	13	3
12	7	3	.	3	11		29		3	149	3	7	.	3	19	3	157	7	61	.
13		13		59	3	7	3	41	11	3	7	3	.	29	.	.	3	11	3	.
14	3		3	11	7	3	.	3	113	67	19		3	13	3	7	.	3	17	3
15	37	3	29	3	13	89	197	11	3	7	3		43	3	7	3	11	.	.	17
416	.	23	7		3	61	3	.	7	3	71	3		73	.	47	3	173	3	7
17	3	43	3	.	.	3	11	3	.	37	.	41	3	7	3	11	23	3	7	3
18	.	3	19	3	41	.	7	149	3	13	3	.	7	3		3	163		.	11
19	7	.	.	.	3	29	3	.	19	3	13	3	.	.	11	199	3	7	3	.
420	3	11	3	137	.	3	23	3	.	.	7	29	3	.	3	.	7	3	11	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

42101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
421		71	13	17	3	23	3	7	73	3	103	3	.	7	29	.	3	17	3	113
22	3	7	3	.	13	3	7	3	.	.	.	11	3	157	3	.	53	3	83	3
23	7	3	.	3	29	17	11	101	3	.	3	7	.	3	.	3	13	7	17	.
24	109	.	.	.	3	7	3	13	59	3	7	3	151	.	.	31	3	.	3	11
25	3	19	3	.	7	3	17	3	101	13	23	71	3	.	3	7	19	3	157	3
426	13	3	137	3	.	43	19	17	3	7	3	47	89	3	7	3	.	.	11	.
27	.	.	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	13	151	.	79	3	.	3	7
28	3	23	3	13	31	3	47	3	.	11	113	.	3	7	3	.	.	3	7	3
29	.	3	107	3	11	13	7	167	3	.	3	.	7	3	.	3	23	.	67	29
30	7	.	29	41	3	.	3	.	11	3	17	3	37	23	.	193	3	7	3	.
431	3	.	3	11	19	3	.	3	13	29	7	17	3	.	3	179	7	3	13	3
32	.	3	.	3	7	79	23	11	3	.	3	139	17	3	.	3	11	83	59	61
33	19	13	11	7	3	.	3	.	.	3	37	3	.	17	7	19	3	89	3	67
34	3	.	3	83	.	3	11	3	7	173	.	137	3	13	3	11	.	3	23	3
35	41	3	139	3	13	53	.	7	3	71	3	19	101	3	13	3	.	.	7	11
436	59	7	.	.	3	.	3	53	181	3	.	3	7	.	11	17	3	19	3	.
37	3	11	3	109	.	3	.	3	.	23	73	7	3	101	3	191	17	3	11	3
38	.	3	71	3	193	7	43	29	3	13	3	41	53	3	59	3	7	17	163	13
39	11	43	23	19	3	.	3	37	167	3	13	3	197	.	53	7	3	.	3	71
40	3	79	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.	3	11	3	47	.	3	17	3
441	.	3	7	3	.	31	157	.	3	.	3	.	.	3	19	3	37	11	131	7
42	.	.	.	11	3	13	3	7	.	3	47	3	11	7	31	13	3	151	3	.
43	3	7	3	59	73	3	7	3	23	127	19	97	3	43	3	101	11	3	61	3
44	7	3	11	3	89	23	.	43	3	31	3	7	157	3	37	3	19	7	13	.
45	.	191	.	47	3	7	3	.	211	3	7	3	.	.	.	11	3	.	3	.
446	3	13	3	31	7	3	.	3	.	.	11	13	3	.	3	7	.	3	.	3
47	.	3	13	3	.	61	97	197	3	7	3	.	41	3	7	3	.	101	29	73
48	71	11	7	.	3	41	3	.	7	3	23	3	127	107	13	.	3	.	3	7
49	3	83	3	.	97	3	.	3	29	167	.	179	3	7	3	.	13	3	7	3
50	11	3	.	3	19	.	7	13	3	11	3	37	7	3	29	3	73	31	107	19
451	7	23	43	79	3	197	3	.	.	3	.	3	.	11	.	.	3	7	3	13
52	3	17	3	53	29	3	103	3	11	41	7	31	3	.	3	19	7	3	.	3
53	89	3	.	3	7	113	.	.	3	61	3	.	11	3	.	3	.	.	137	101
54	83	.	17	7	3	.	3	11	53	3	.	3	181	.	7	.	3	29	3	47
55	3	.	3	17	71	3	23	3	7	.	53	11	3	.	3	13	.	3	37	3
456	31	3	59	3	17	.	11	7	3	43	3	103	.	3	47	3	.	13	7	191
57	23	7	.	43	3	17	3	131	13	3	11	3	7	19	.	53	3	149	3	11
58	3	163	3	19	61	3	.	3	.	.	.	7	3	.	3	23	.	3	19	3
59	197	3	29	3	31	7	17	47	3	19	3	13	23	3	71	3	7	.	11	.
60	157	179	13	139	3	11	3	17	.	3	.	3	191	13	19	7	3	41	3	.
461	3	.	3	7	13	3	107	3	17	7	193	163	3	.	3	29	.	3	.	3
62	47	3	7	3	11	37	113	.	3	17	3	.	83	3	.	3	13	131	103	7
63	.	19	.	.	3	29	3	7	11	3	.	3	107	7	.	149	3	11	3	.
64	3	7	3	11	.	3	7	3	61	13	17	29	3	59	3	.	.	3	.	3
65	7	3	.	3	.	193	181	11	3	.	3	7	19	3	173	3	11	7	89	.
466	.	29	11	127	3	7	3	.	23	3	7	3	13	.	149	.	3	.	3	.
67	3	.	3	13	7	3	11	3	19	.	.	83	3	17	3	7	43	3	.	3
68	17	3	.	3	.	13	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	31	139	79	11
69	.	17	7	61	3	43	3	.	7	3	167	3	71	.	11	73	3	13	3	7
70	3	11	3	29	53	3	.	3	13	59	31	131	3	7	3	17	.	3	7	3
471	19	3	17	3	.	11	7	.	3	.	3	.	7	3	.	3	17	.	.	.
72	7	13	.	17	3	31	3	23	.	3	83	3	73	149	.	97	3	7	3	37
73	3	.	3	.	11	3	.	3	79	37	7	19	3	11	3	.	7	3	113	3
74	107	3	.	3	7	17	.	.	3	47	3	43	.	3	13	3	.	11	17	23
75	.	67	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	11	.	7	137	3	.	3	17
476	3	181	3	.	47	3	17	3	7	.	97	.	3	19	3	.	11	3	29	3
77	.	3	11	3	.	.	.	7	3	13	3	11	59	3	.	3	.	.	7	13
78	13	7	.	.	3	137	3	.	17	3	13	3	7	31	.	11	3	.	3	59
79	3	.	3	23	.	3	.	3	173	17	11	7	3	.	3	.	191	3	.	3
480	23	3	61	3	41	7	.	31	3	.	3	.	43	3	11	3	7	107	23	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
421	61	3	.	3	7	11	149	.	3	181	3	.	.	3	.	3	31		.	19
22	11	29	.	7	3	13	3	43	41	3	67	3	.	.	7	13	3	.	3	.
23	3	41	3	.	11	3	13	3	7	.	31		3	11	3	19	.	3	.	3
24	.	3		3	.	.	.	7	3		3	107	23	3	.	3	.	11	7	
25	17	7	.	11	3	31	3	.	.	3	.	3	7	97	37	.	3	191	3	41
426	3	13	3	29	37	3	.	3	71	139	.	7	3	.	3	.	11	3	.	3
27	.	3	11	3	61	7	.	19	3	.	3	11	179	3	.	3	7	.	.	127
28	73	.	17	.	3	.	3	163	43	3	53	3	137	19	13	7	3	59	3	.
29	3	.	3	7	.	3	.	3	97	7	11	.	3	53	3	.	13	3	19	3
30	.	3	7	3	17		.	13	3	19	3	23	67	3	11	3	41	.	71	7
431	.	11	103	.	3	17	3	7	23	3	.	3	29	7	19		3	47	3	13
32	3	7	3	181	.	3	7	3	.	109	13	113	3	.	3	73	.	3	29	3
33	7	3	191	3	131	103	17	31	3	11	3	7	13	3	43	3	.	7	.	
34	.	19	.	13	3	7	3	17	29	3	7	3	.	11	.	157	3	23	3	.
35	3	97	3	43	7	3	19	3	11	.	.	.	3	41	3	7	.	3	.	3
436	.	3	149	3	.	47	13	.	3	7	3	31	11	3	7	3	.	13	37	89
37	67	.	7	.	3	107	3	11	7	3		3	.	.	.	.	3	.	3	7
38	3	.	3	61	23	3	.	3	19	73	17	11	3	7	3	.	.	3	7	3
39	.	3	113	3	.	.	7	.	3	.	3	13	7	3	.	3	.	29	.	23
40	7	.	13	.	3	139	3	127	.	3	11	3	17	13	.	.	3	7	3	11
441	3	67	3	.	13	3	29	3	.	163	7	.	3	17	3	.	7	3	193	3
42	17	3		3	7	.	.		3	.	3	.	.	3	67	3	13	.	11	31
43	.	17		7	3	11	3	13	.	3	199	3	.	.	7	.	3	103	3	29
44	3	.	3	23	173	3	53	3	7	11	79	19	3	.	3	17	.	3		3
45	13	3	17	3	11	.	41	7	3	29	3	.	109	3	.	3	17	19	7	103
446	.	7		17	3	59	3	19	11	3	43	3	7	.	.	23	3	11	3	.
47	3	.	3	11	17	3	89	3	.	.	.	7	3	19	3	.	47	3	.	3
48		3	31	3	113	7	.	11	3	23	3	.	37	3	.	3	7	.	17	59
49	79	.	11	.	3	.	3	193	.	3	41	3	31	.	.	7	3	13	3	17
50	3	.	3	7	.	3	11	3	13	7	.	61	3	.	3	11	67	3	13	3
451	163	3	7	3	.	19	31	17	3	199	3	.	.	3	73	3	.	43	.	7
52	37	13	167	.	3	.	3	7	17	3	19	3	.	7	11	.	3	.	3	97
53	3	7	3	67		3	7	3	59	17	.	23	3	13	3	.	19	3	11	3
54	7	3	131	3	13	11	19	41	3	37	3	7	.	3	13	3	.	7	.	173
55	11	.	.	29	3	7	3	.	199	3	7	3	19	79	.	.	3	127	3	.
456	3	71	3	.	7	3		3	109	.	.	17	3	11	3	7	.	3	.	3
57		3	.	3	67	.	.	37	3	7	3	.	17	3	7	3	29	11	41	13
58	13	.	7	11	3	.	3	.	7	3	13	3	11	17	.	109	3	.	3	7
59	3	.	3		19	3	43	3	.	31	23	.	3	7	3	.	11	3	7	3
60	.	3	11	3	.	73	7	23	3	.	3	11	7	3	17	3	.	.	31	.
461	7	.	101	31	3	13	3	137	.	3	61	3	.	.	.	11	3	7	3	.
62	3	23	3	167	.	3	13	3	.	.	7	.	3	31	3	41	7	3	67	3
63		3	151	3	7	71	199	89	3	79	3	19	.	3	11	3	23	17	13	
64	.	11	.	7	3	97	3	31	.	3	.	3	53	23	7	.	3	19	3	
65	3	13	3	.	101	3	.	3	7	.	47	13	3	37	3	.	.	3	17	3
466	11	3	13	3	29	.	23	7	3	11	3		.	3	.	3	.	53	7	17
67	.	7	.	19	3	101	3	.	.	3	29	3	7	11	13	71	3	73	3	53
68	3		3	47	.	3	.	3	11	19	.	7	3	173	3	.	13	3	23	3
69	29	3	.	3	151	7	67	13	3	107	3	109	11	3	19	3	7	.	.	43
70	.	211	.	.	3	19	3	11	103	3	179	3	23	197	.	7	3	.	3	13
471	3	61	3	7	.	3	101	3	43	7	13	11	3	29	3	.	41	3	109	3
72	.	3	7	3	167	151	11	.	3	41	3	.	13	3	.	3	19	.	.	7
73	.	.	23	13	3	.	3	7	127	3	11	3	.	7	.	.	3	83	3	11
74	3	7	3	.	31	3	7	3	37	29	197	79	3	103	3	13	.	3		3
75	7	3	19	3	199	.	13	.	3	113	3	7	.	3	23	3	.	7	11	
476	17	.		.	3	7	3	73	13	3	7	3	.	41	43	103	3	37	3	.
77	3	17	3	163	7	3	37	3	23	11	.	.	3	71	3	7	.	3	.	3
78	109	3	.	3	11	23	151	.	3	7	3	13		3	7	3	83	47	211	19
79	.	79	7	199	3		3	.	7	3		3	.	13	47	37	3	11	3	7
480	3	29	3	11	13	3	71	3	53	.	131		3	7	3	19	.	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

48101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
481	103	11	73	.	3	13	3	.	.	3	17	3	.	127	37	7	3	31	3	89
82	3	19	3	7	37	3	13	3	.	7	29	17	3	139	3	.	19	3		3
83	11	3	7	3	.	.	19	211	3	11	3	31	17	3	.	3	.	29	13	7
84	29	97	.	.	3	.	3	7	41	3	79	3	19	7	.	59	3	193	3	.
85	3	7	3	179	139	3	7	3	11	.	.	13	3	.	3	.	.	3	43	3
486	7	3	13	3	.	173	61	.	3	.	3	7	11	3	17	3	127	7	.	.
87	31	113	53	67	3	7	3	11	83	3	7	3	.	.	13	17	3	79	3	29
88	3	37	3	.	7	3	.	3	.	.	157	11	3	47	3	7	13	3	.	3
89	79	3	.	3	59	41	11	13	3	7	3	113	167	3	7	3	109	17	.	31
90	19	.	7	.	3	23	3	.	7	3	11	3	.	.	.	19	3	.	3	7
491	3	.	3	.	67	3	.	3	.	.	13	73	3	7	3	.	157	3	7	3
92	.	3	.	3		29	7	83	3	.	3	19	7	3	53	3	41	23	11	17
93	7	47	.	13	3	11	3	149	31	3	107	3	.	.	103	.	3	7	3	61
94	3	127	3	.	.	3	.	3	73	11	7	.	3	.	3	13	7	3	197	3
95	59	3	31	3	7	67	13	23	3	.	3	.	.	3	.	3	107	13		.
496	193	.	113	7	3	.	3	29	11	3	.	3	31	.	7	.	3	11	3	131
97	3	23	3	11	.	3	83	3	7	19	.	223	3	41	3	.	.	3	.	3
98	.	3	.	3	.	109	31	7	3	.	3	13	.	3	19	3	11	.	7	79
99	139	7	11	29	3	19	3	.	.	3	.	3	7	13	.	.	3	.	3	199
500	3	31	3	43	13	3	11	3	.	.	19	7	3	.	3	11	163	3	.	3
501	.	3	89	3	.	7	23	.	3	.	3	.	.	3	181	3	7	41	.	11
02	17	61	.	23	3	149	3	13	.	3	.	3	.	191	11	7	3	47	3	109
03	3	11	3	7	.	3	67	3	.	7	59	.	3	.	3	71	.	3	11	3
04	13	3	7	3	.	11	.	127	3	.	3	211	29	3	31	3	.	73	61	7
05	11	.	17	53	3	.	3	7	19	3	.	3	13	7	97	.	3	.	3	.
506	3	7	3	13	11	3	7	3	223	23	.	197	3	11	3	79	89	3	.	3
07	7	3	.	3	17	13	41	67	3	.	3	7	97	3	113	3	.	7	31	19
08	37	101	23	11	3	7	3	89	.	3	7	3	11	.	29	.	3	13	3	.
09	3	109	3	.	7	3	59	3	13	.	127	.	3	31	3	7	11	3	13	3
10	.	3	11	3	29	139	17	163	3	7	3	11	.	3	7	3	43	.	.	71
511	137	13	7	.	3	79	3	17	7	3	29	3	.	.	.	11	3	199	3	7
12	3	.	3	41	83	3	.	3	17	181	11	.	3	7	3	.	.	3	7	3
13	29	3	.	3	13	23	7	19	3	17	3	.	7	3	11	3	.	.	.	.
14	7	11	.	101	3	.	3	.	.	3	.	3	.	19	.	.	3	7	3	.
15	3	.	3	19	.	3	.	3	.	67	7	227	3	29	3	.	7	3	19	3
516	11	3	.	3	7	.	71	41	3	11	3	17	.	3	.	3	113	43	.	13
17	13	149	29	7	3	.	3	.	.	3	13	3	17	11	7	31	3	59	3	.
18	3	.	3	103	197	3	.	3	7	29	.	.	3	17	3	.	47	3	139	3
19	17	3	.	3	23	.	193	7	3	137	3	.	11	3	167	3	.	127	7	.
20	149	7	131	.	3	13	3	11	.	3	.	3	7	61	17	13	3	71	3	23
521	3	.	3	107	31	3	13	3	.	47	.	7	3	37	3	17	23	3	.	3
22	.	3	17	3	109	7	11	79	3	.	3	29	19	3	.	3	7	89	13	.
23	.	193	19	17	3	.	3	113	.	3	11	3	43	59	199	7	3	17	3	11
24	3	13	3	7	17	3	23	3	19	7	103	13	3	.	3	41	229	3	179	3
25	.	3	7	3	.	17	.	29	3	53	3	.	131	3	107	3	.	.	11	7
526	23	41	31	.	3	11	3	7	101	3	.	3	.	7	13	.	3	61	3	17
27	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	67	3	.	3	23	13	3	.	3
28	7	3	.	3	11	.	.	13	3	101	3	7	23	3	.	3	53	7	43	41
29	.	.	191	157	3	7	3	.	11	3	7	3	41	43	.	167	3	11	3	13
30	3	.	3	11	7	3	.	3	37	17	13	19	3	181	3	7	29	3	.	3
531	.	3	23	3	173	.	.	11	3	7	3	.	13	3	7	3	11	19	.	.
32	.	83	7	13	3	127	3	19	7	3	17	3	.	.	139	.	3	37	3	7
33	3	151	3		89	3	11	3	71	.	.	17	3	7	3	11	41	3	7	3
34	.	3	.	3	.	31	7	.	3	41	3	23	7	3	.	3	.	13	19	11
35	7	.	.	73	3	59	3	109	13	3	.	3	199	17	11	37	3	7	3	.
536	3	11	3	.	.	3	.	3	29	.	7	.	3	.	3	.	7	3	11	3
37	83	3	43	3	7	11	.	.	3	31	3	13	.	3	17	3	61	223	71	59
38	11	173	13	7	3	.	3	.	107	3	19	3	.	13	7	17	3	23	3	.
39	3	19	3	31	11	3	.	3	7	.	.	199	3	11	3	.	17	3	73	3
540	.	3	53	3	.	.	19	7	3	89	3	97	71	3	.	3	13	11	7	.
\	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
481	179	3	.	3	17	.	7	11	3	67	3	.	7	3		3	11	.		157
82	7	73	11	.	3	17	3	13	.	3	23	3	.	53	109	43	3	7	3	.
83	3	.	3	37	137	3	11	3	.	13	7	101	3	.	3	11	7	3		3
84	13	3	47	3	7	.	17	19	3	.	3	.	.	3	.	3	.	71	.	11
85	47	23	59	7	3	.	3	17	.	3	31	3	13	19	7	.	3	.	3	23
486	3	11	3	13		3	41	3	7	.	.	.	3	89	3	181	23	3	11	3
87	.	3		3		11	.	7	3	17	3	.	.	3	.	3	97	59	7	
88	11	7	.	.	3	131	3	.	.	3	37	3	7	.	19	.	3	13	3	107
89	3	.	3	173	11	3	23	3	13	.	17	7	3	11	3	.	.	3	13	3
90	181	3		3	71	7	139	.	3	31	3	17	.	3	191	3	7	11	29	37
491	23	13	.	11	3	211	3	.	.	3	.	3	11	137	101	7	3	.	3	.
92	3		3	7	.	3	19	3	29	7	.	.	3	13	3	23	11	3	.	3
93	17	3	7	3	13	.	.	.	3	97	3	11	19	3	13	3	.	.	47	7
94	.	17	19	.	3	.	3	7	61	3	.	3	.	7	17	11	3	43	3	
95	3	7	3		29	3	7	3	19	89	11	43	3	179	3	17	101	3	.	3
496	7	3	17	3	53	.	.	.	3	13	3	7	.	3	11	3	17	7	.	13
97	13	11		17	3	7	3	157	71	3	7	3	67	.	.	.	3	17	3	19
98	3	.	3	73	7	3	47	3	.	53	.	31	3	83	3	7	.	3	41	3
99	11	3	.	3	47	17	29	107	3	7	3	23	151	3	7	3	.	.	17	.
500	.	.	7	113	3	13	3	.	7	3	.	3	61	11	.	13	3	.	3	7
501	3	.	3	.	103	3	13	3	11	131	.	19	3	7	3	31	53	3	7	3
02	31	3	29	3	.	.	7	17	3	.	3	137	7	3	.	3	.	19	13	179
03	7	43	37	.	3	.	3	11	17	3	.	3	83	.	.	41	3	7	3	101
04	3	13	3	.	.	3	109	3	41	17	7	11	3	19	3	29	7	3	.	3
05	.	3	13	3	7	59	11	61	3	163	3	37	.	3	.	3	.	.	19	.
506	.	37	179	7	3	29	3	23	.	3	11	3	59	.	7	173	3	163	3	11
07	3	.	3	193	23	3	.	3	7	.	.	17	3	43	3	.	13	3	79	3
08	211	3	.	3	181	19	.	7	3	.	3	83	17	3	151	3	.		7	23
09	.	7	.	131	3	11	3		.	3	19	3	7	17	67	.	3	.	3	13
10	3	19	3	.	.	3	223	3	.	11	13	7	3	23	3	47	19	3	37	3
511	.	3	.	3	11	7	19	.	3	73	3	61	13	3	17	3	7	.	.	
12	53	107	.	13	3	.	3	167	11	3	47	3	19	.	.	7	3	11	3	43
13	3	89	3	7	.	3	31	3	47	7	83	191	3	.	3	13	17	3	103	3
14	23	3	7	3	.	53	13	11	3	.	3	.	.	3	.	3	11	13	23	7
15		31	11	47	3	.	3	7	13	3	.	3	.	7	79	23	3	.	3	.
516	3	7	3	.	19	3	7	3	163	.	31	.	3		3	11	.	3	17	3
17	7	3	73	3	191	37	.	.	3	23	3	7	53	3	.	3	67	7		11
18	19	.	13	.	3	7	3			3	7	3	29	13	11	19	3	.	3	
19	3	11	3	223	7	3	157	3	.	.		59	3	227	3	7		3	11	3
20	.	3	.	3	79	11	.		3	7	3	19	.	3	7	3	13	113	59	53
521	11	.	7	43	3	.	3	13	7	3	.	3	.	.	23	.	3	19	3	7
22	3	.	3	.	11	3		3	167	13	61	23	3	7	3	.	.	3	7	3
23	13	3	41	3	.	.	7	.	3	83	3	.	7	3	.	3	.	11	151	61
24	7	.	.	11	3	23	3	71	137	3	97	3	11	31	73	.	3	7	3	47
25	3	.	3	13	.	3	.	3	.	19	7	.	3	.	3	43	7	3	149	3
526	37	3	11	3	7	13		31	3	.	3	11	139	3	19	3	.	23	.	151
27	17	71	.	7	3	19	3	.	113	3	89	3	47	.	7	11	3	13	3	37
28	3	17	3	.	.	3	29	3	7	37	11		3	.	3	.	227	3	13	3
29	.	3	.	3	211	.	.	7	3	.	3	31	.	3	11	3	19	197	7	.
30	.	7	17	97	3	47	3	.	73	3	.	3	7	109	.		3	.	3	29
531	3	23	3	17	.	3	79	3	.	.	41	7	3	13	3	.	43	3		3
32	11	3	19	3	13	7	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3	7	137	223	
33	31	.	229		3	17	3	83	19	3	.	3		11	197	7	3	107	3	67
34	3	.	3	7	193	3	127	3	11	7	53	.	3	79	3	89	149	3	61	3
35		3	7	3	19	29	17	.	3	13	3	131	11	3	41	3	.			7
536	13	.	.	23	3	103	3	7	191	3	13	3	.	7	37	53	3	.	3	.
37	3	7	3	.	37	3	7	3	17	.	.	11	3	.	3	19	.	3	23	3
38	7	3	.	3	.	61	11	103	3	17	3	7	.	3	.	3	.	7	.	.
39	.	163	79	.	3	7	3	29	31	3	7	3	23	37	.	13	3	.	3	11
540	3	191	3	.	7	3	13	3	139	23	17	41	3	.	3	7	.	3	47	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

54101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
541		7	61	11	3	53	3	13	.	3	113	3	7		43	.	3	29	3	173
42	3	67	3	151	23	3	.	3	59	13	211	7	3	193	3	73	11	3	17	3
43	13	3	11	3	.	7	29	.	3	.	3	11	.	3	67	3	7	31	.	17
44	.	.	41	.	3	.	3	.	.	3	37	3	13	29	.	7	3	.	3	.
45	3	.	3	7	19	3	.	3	.	7	11	31	3	23	3	.		3	.	3
546	.	3	7	3	97	13	.	193	3	.	3	.	.	3	11	3	101	53	.	7
47	19	11	227	.	3	.	3	7	.	3	.	3	239	7	127	19	3	13	3	53
48	3	7	3	23	59	3	7	3	13	73	109	.	3	.	3	29	173	3	13	3
49	7	3	.	3	43	89	.	.	3	11	3	7	163	3	137	3	.	7	23	.
50	.	13	67	.	3	7	3	37	.	3	7	3	113	11	47	23	3	19	3	.
551	3	.	3	.	7	3	.	3	11	199	.	29	3	13	3	7	67	3	.	3
52	.	3	.	3	13	.	.	.	3	7	3	.	11	3	7	3	37	.	101	.
53	17	29	7	19	3	.	3	11	7	3	61	3	.	.	.	.	3	.	3	7
54	3	17	3	67	.	3	151	3	157	19	43	11	3	7	3	.	.	3	7	3
55	.	3	47	3	.	43	7	59	3	13	3	.	7	3	19	3	.	67	.	13
556	7	.	17	.	3	19	3	.	.	3	11	3	.	.	23	.	3	7	3	41
57	3	53	3	17	.	3	.	3	.	103	7	23	3	.	3	139	7	3	107	3
58	41	3	.	3	7	.	.	.	3	.	3	.	31	3	.	3	19	.	11	.
59		.	37	7	3	11	3	199	.	3	.	3	.	.	7	13	3	43	3	.
60	3	.	3		79	3	13	3	7	11	179	43	3	137	3	.	.	3	41	3
561	.	3	19	3	11	.	17	7	3	.	3	37	.	3	73	3	31	23	7	.
62	43	7	.	.	3	67	3	17	11	3	59	3	7	53	.	.	3	11	3	.
63	3	13	3	11	.	3	199	3	17	151	23	7	3	.	3	53	103	3	29	3
64	.	3	13	3	19	7	.	11	3	17	3	73	.	3	.	3	7	.	47	19
65		.	11	.	3	31	3	.	29	3	.	3	.	.	13	7	3	.	3	193
566	3	23	3	7	.	3	11	3	41	7	17	.	3	.	3	11	13	3	37	3
67	.	3	7	3	.	.	43	13	3	131	3	17	.	3	.	3	23	179	.	7
68	79	43	.	.	3	.	3	7		3	.	3	17	7	11	113	3	.	3	13
69	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	13	.	3	17	3	97	.	3	11	3
70	7	3	109	3	47	11	23	19	3	127	3	7	13	3	.	3	.	7	.	89
571	11	17	.	13	3	7	3	.	239	3	7	3	.	19	17	.	3	.	3	.
72	3	.	3	19	7	3	29	3	.	.	89	151	3	11	3	7	.	3	19	3
73	.	3	17	3	223	37	13	31	3	7	3	.	.	3	7	3	17	11	.	.
74	61	137	7	11	3	.	3	67	7	3	.	3	11	79	19	71	3	17	3	7
75	3	.	3	131	17	3	113	3	97	23	.	.	3	7	3	163	11	3	7	3
576	.	3	11	3	53	17	7	157	3	29	3	11	7	3	.	3	.	59	17	.
77	7	19	13	.	3	.	3	.	197	3	.	3	.	13	.	11	3	7	3	17
78	3	.	3	.	13	3	17	3	67	53	7	.	3	131	3	.	7	3	.	3
79	.	3	79	3	7	29	.	17	3	.	3	53	19	3	11	3	13	.	.	167
80	31	11	19	7	3	.	3	13	17	3	.	3	.	131	7	127	3	.	3	.
581	3	97	3	.	.	3	89	3	7	13	37	.	3	61	3	47	53	3	.	3
82	11	3	.	3	.	23	.	7	3	11	3	.	.	3	.	3	139	.	7	31
83	173	7	199	.	3	.	3	29	.	3	17	3	7	11	.	227	3	41	3	19
84	3	.	3	13	.	3	.	3	11	37	.	7	3	71	3	.	.	3	211	3
85	19	3	41	3	.	7	163	139	3	43	3	107	11	3	.	3	7	.	127	.
586	.	.	103	29	3	.	3	11	31	3	23	3	.	17	191	7	3	13	3	223
87	3	47	3	7	.	3	71	3	13	7	.	11	3	.	3	151	.	3	13	3
88	127	3	7	3	23	103	11	131	3	59	3	89	.	3	17	3	29	19	83	7
89	.	13	.	.	3	.	3	7	.	3	11	3	31	7	.	17	3	.	3	11
90	3	7	3	.	.	3	7	3	.	.	67	.	3	13	3	43	17	3	137	3
591	7	3	.	3	13	.	31	.	3	.	3	7	29	3	13	3	.	7	11	.
92	53	73	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	61	.	37	.	3	.	3	179
93	3	31	3	127	7	3	23	3	137	11	41	79	3	.	3	7	.	3	17	3
94	191	3	.	3	11	19	.	.	3	7	3	67	103	3	7	3	.	.	.	13
95	13	157	7	.	3	.	3	53	7	3	13	3	59	37	29	.	3	11	3	7
596	3	19	3	11	.	3	.	3	.	109	.	.	3	7	3	23	19	3	7	3
97	227	3	.	3	29	211	7	11	3	.	3	.	7	3	31	3	11	.	.	149
98	7	79	11	.	3	13	3	41	163	3	29	3	19	.	53	13	3	7	3	97
99	3	37	3	139	181	3	11	3	.	31	7	.	3	73	3	11	7	3	151	3
600	29	3	23	3	7	.	.	47	3	193	3	.	173	3	.	3	.	97	13	11
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
541	.	3	31	3	41	.	.	19	3	7	3	17	.	3	7	3	47	.	11	83
42	.	227	7	29	3	11	3	.	7	3	.	3	17	19	.	233	3	.	3	7
43	3	13	3	19	.	3	.	3	.	11	.	13	3	7	3	137	109	3	7	3
44	17	3	13	3	11	107	7	.	3	19	3	157	7	3	23	3	29	.		.
45	7	17	89	.	3	.	3	197	11	3	.	3	.	.	13	79	3	7	3	71
546	3	31	3	11	47	3	.	3	23	.	7	.	3	149	3	17	7	3	83	3
47	.	3	17	3	7	23	.	11	3	.	3	.	29	3	.	3	11	157	37	.
48	.	19	11	7	3	83	3	.	37	3	.	3	.	71	7	131	3	17	3	13
49	3	179	3	.	17	3	11	3	7	.	13	.	3	.	3	11	127	3	43	3
50	.	3	.	3	.	17	53	7	3	.	3	.	13	3	31	3	89	37	7	11
551	131	7	19	13	3	.	3	43	.	3	23	3	7	139	11	229	3	97	3	17
52	3	11	3	.	73	3	17	3	19	31	167	7	3	59	3	13	.	3	11	3
53	.	3	197	3	23	7	13	17	3	.	3	79	.	3	97	3	7	13	31	.
54	11	23	.	31	3	37	3	.	13	3	29	3	109	113	.	7	3	211	3	19
55	3	73	3	7	11	3	181	3	61	7	149	.	3	11	3	.	23	3	53	3
556	19	3	7	3	.	.	.	179	3	.	3	13	.	3	233	3	.	11	.	7
57	197	127	13	11	3	.	3	7	43	3	17	3	11	7	.	47	3	.	3	.
58	3	7	3	83	13	3	7	3	.	59	71	17	3	29	3	.	11	3	.	3
59	7	3	11	3	107	191	.	97	3	223	3	7	17	3	.	3	13	7	.	29
60	23	.	29	61	3	7	3	13	47	3	7	3	.	17	.	11	3	.	3	.
561	3	233	3	89	7	3	.	3		13	11	.	3	19	3	7	83	3	.	3
62	13	3	101	3	127	.	.	.	3	7	3	167	23	3	7	3	181	41	19	.
63	37	11	7	.	3	157	3	.	7	3	.	3	13	.	113	17	3	.	3	7
64	3	.	3	13	131	3	.	3	149	.	.	.	3	7	3	.	17	3	7	3
65	11	3	23	3	163	13	7	.	3	11	3	29	7	3	71	3	.	17	.	.
566	7	181	53	.	3	.	3	61	.	3	19	3	.	11	.	83	3	7	3	31
67	3	19	3	211	31	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	109	7	3	13	3
68	139	3	.	3	7	101	19	29	3	.	3	23	11	3	163	3	.	.	.	17
69		13	.	7	3	.	3	11	23	3	227	3	19	.	7	.	3	.	3	.
70	3	59	3	.	43	3	149	3	7	.	.	11	3	13	3	.	37	3	.	3
571	67	3	61	3	13	.	11	7	3	.	3	.	211	3	13	3	.	.	7	47
72	.	7	31	.	3	173	3	.	.	3	11	3	7	.	.	59	3	23	3	11
73	3	83	3	41	19	3	.	3	103	.	181	7	3	.	3	.	29	3	.	3
74	73	3	.	3	37	7	.	101	3	13	3	229	47	3	.	3	7	.	11	13
75	13	67	.	.	3	11	3	23	.	3	13	3	71	89	.	7	3	.	3	239
576	3	.	3	7	23	3	.	3	101	7	137	.	3	37	3	.	31	3	.	3
77	.	3	7	3	41	47	61	41	3	.	3	19	.	3	.	3	.	.	29	7
78	17	.	47	.	3	13	3	7	11	3	31	3	.	7	107	13	3	11	3	.
79	3	7	3	11	149	3	7	3	29	.	.	37	3	23	3	103	.	3	59	3
80	7	3	.	3	.	31	.	11	3	.	3	7	241	3	29	3	11	7	13	.
581	.	.	11	19	3	7	3	.	.	3	7	3	73	83	31	.	3	.	3	.
82	3	13	3	17	7	3	11	3	.	19	101	13	3	167	3	7	71	3	97	3
83	23	3	13	3	17	.	.	.	3	7	3	.	79	3	7	3	.	.	23	11
84	.	.	7	53	3	17	3	59	7	3	.	3	.	233	11	23	3	29	3	7
85	3	11	3	31	157	3	.	3	37	.	19	.	3	7	3	41	13	3	7	3
586	89	3	.	3	.	11	7	13	3	23	3	.	7	3	.	3	19	.	79	.
87	7	41	.	67	3	.	3	17	.	3	53	3	43	29	.	.	3	7	3	13
88	3	229	3	71	11	3	37	3	17	113	7	97	3	11	3	.	7	3	.	3
89	167	3	19	3	7	.	.	109	3	17	3	.	13	3	61	3	.	11	.	41
90	.	.	73	7	3	.	3	.	19	3	.	3	11	.	7	37	3	.	3	113
591	3	149	3	.	67	3	.	3	7	47	17	23	3	.	3	13	11	3	.	3
92	193	3	11	3	19	.	13	7	3	.	3	11	.	3	101	3	211	13	7	19
93	.	7	.	.	3	23	3	.	13	3	.	3	7	43	.	11	3	.	3	.
94	3	.	3	37	97	3	.	3	.	.	11	7	3	17	3	19	41	3		3
95	17	3	.	3	.	7	.	71	3	41	3	13	.	3	11	3	7	23	61	107
596	.	11	13	.	3	.	3	.	.	3	83	3	37	13	17	7	3	.	3	.
97	3	.	3	7	13	3	59	3	.	7	23	.	3	191	3	17	.	3	.	3
98	11	3	7	3	31	.	131	19	3	11	3	.	233	3	.	3	13	101	89	7
99	.	167	.	17	3	61	3	7	.	3	37	3	.	7	223	239	3	17	3	.
600	3	7	3	19	17	3	7	3	11	13	.	73	3	.	3		.	3	19	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

60101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
601	.	.		7	3	47	3	79	59	3		3	157	.	7	.	3	137	3	.
02	3	11	3	.	19	3	.	3	7	.	229	13	3	29	3	59	107	3	11	3
03	47	3	13	3	41	11	.	7	3	179	3	23	.	3	.	3	83	.	7	29
04	11	7	29	193	3	.	3	31	23	3	.	3	7	223	13	19	3	.	3	.
05	3	17	3	.	11	3	73	3	.	29	.	7	3	11	3	.	13	3	191	3
606	.	3	.	3	.	7	.	13	3	.	3	19	.	3	.	3	7	11	.	.
07	101	.	17	11	3	109	3	.	41	3	.	3	11	.	.	7	3	19	3	13
08	3	41	3	7	.	3	61	3	.	7	13	59	3	127	3	83	11	3	71	3
09	.	3	7	3	17	.	.	.	3	.	3	11	13	3	.	3	149	.	59	7
10	.	53	.	13	3	17	3	7	139	3	.	3	.	7	67	11	3	.	3	41
611	3	7	3	53	23	3	7	3	.	19	11	.	3	113	3	13	.	3	47	3
12	.	3	97	3	.	41	13	29	3	.	3	7	.	3	11	3	47	7	73	23
13	59	11	101	37	3	7	3	17	13	3	7	3		.	83	.	3	.	3	31
14	3	.	3	.	7	3	.	3	17	239	19	47	3	23	3	7	.	3	43	3
15	11	3	.	3	.	137	227	.	3	7	3	13	37	3	7	3	19	.	.	61
616	229	.	7	.	3	.	3	43	7	3	.	3	.	11	.	53	3	.	3	7
17	3	.	3	23	13	3	.	3	11	.	17	.	3	7	3	107	29	3	7	3
18	23	3	19	3	113	.	7	.	3	211	3	17	7	3	.	3	13	.	23	127
19	7	103	31	.	3	101	3	11	19	3	.	3	17	.	241	23	3	7	3	.
20	3	.	3	59	.	3	.	3	109	13	7	11	3	17	3	.	7	3	.	3
621	13	3	173	3	7	179	11	.	3	23	3	.	.	3	.	3		.	29	19
22	.	17	.	7	3	.	3		43	3	11	3	13	.	7	109	3	67	3	11
23	3	.	3	13	.	3	101	3	7	.	.	157	3	83	3	17	31	3	.	3
24	.	3	17	3	139	13	.	7	3	.	3	163	149	3	29	3	17	41	7	197
25	.	7		17	3	11	3	101	103	3	31	3	7	.	23	.	3	13	3	.
626	3	.	3	137	17	3	.	3	13	11	.	7	3	.	3	.	37	3	13	3
27	.	3	73	3	11	7	59	19	3	.	3	149	.	3	43	3	7	.	17	131
28	.	13	181	107	3	23	3		11	3	.	3	83	19	31	7	3	11	3	17
29	3	.	3	7	53	3	17	3		7	.	.	3	13	3	.	113	3	19	3
30	251	3	7	3	13	61	29	11	3	19	3	.	.	3	13	3	11	23	67	7
631	89	.	11	223	3	.	3	7	17	3	.	3	.	7	19	103	3	233	3	.
32	3	7	3	31	.	3	7	3	191	17	23	53	3	37	3	11	.	3	.	3
33	7	3	29	3	.	.	.	23	3	13	3	7	.	3	.	3	97	7	.	11
34	13	19	163	.	3	7	3	.	.	3	7	3	137	229	11	.	3	.	3	67
35	3	11	3	41	7	3	19	3	.	139	.	17	3	.	3	7	.	3	11	3
636	.	3	.	3	.	11		113	3	7	3	.	17	3	7	3	23	31	.	.
37	11	.	7	.	3	13	3	.	7	3	.	3	101	17	.	13	3	.	3	7
38	3	.	3	.	11	3	13	3	19	.	83	29	3	7	3	.	.	3	7	3
39	.	3	.	3	79	.	7	41	3	97	3	.	7	3	17	3	43	11	13	.
40	7	29	.	11	3	.	3	.	73	3	43	3	11		.	17	3	7	3	19
641	3	13	3		61	3	97	3	37	.	7	13	3	59	3	31	7	3	23	3
42	19	3	11	3	7	157	.	149	3	.	3	11	.	3	.	3	227	17	41	47
43	.	.	107	7	3	73	3	.	131	3	.	3	23	.	7	11	3	37	3	229
44	3	.	3	29	41	3	37	3	7	23	11	19	3	.	3	.	13	3	17	3
45	53	3	251	3	31	.	149	7	3	113	3	173	47	3	11	3	233	19	7	17
646	.	7	23	.	3	.	3	19	.	3	.	3	7	.	109	37	3	127	3	13
47	3	89	3	.	163	3	.	3	61	59	13	7	3	19	3	41	101	3	.	3
48	11	3	229	3	.	7	.	53	3	11	3	241	13	3	23	3	7	61	19	.
49	.	41	47	13	3	139	3	.	.	3	.	3	29	11		7	3	101	3	107
50	3	.	3	7	.	3	79	3	11	7	.	.	3	.	3	13	193	3	29	3
651	.	3	7	3		19	13		3	.	3	.	11	3	53	3	.	13	.	7
52	113	.	197	61	3	.	3	7	13	3	19	3	37	7	89	.	3	53	3	71
53	3	7	3	.	241	3	7	3	83	.	.	11	3	79	3	223	19	3	101	3
54	7	3	.	3	149	.	11	.	3	.	3	7	59	3	.	3	31	7	.	.
55	17	31	13	109	3	7	3	.	.	3	7	3	19	13	.	.	3	.	3	11
656	3	17	3		7	3	.	3	211	137	29	.	3	.	3	7	41	3	.	3
57	.	3	.	3	23				3	7	3	.	.	3	7	3	13	29	11	37
58	29	23	7	.	3	11	3	13	7	3	.	3	.	43	.		3	.	3	7
59	3	59	3	17	19	3	29	3		11			3	7	3	233	23	3	7	3
660	13	3	149	3	11	251	7	107	3	103	3		7	3	.	3	.	211		257
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
601	7	3	43	3	.	17	.	.	3	19	3	7	11	3	139	3	23	7	17	37
02	.	89	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3	13	23	19	.	3	.	3	17
03	3	.	3	13	7	3	17	3	73	.	173	11	3	.	3	7	131	3	.	3
04	61	3	.	3	103	13	11	17	3	7	3	197	31	3	7	3	241	.	.	101
05	151	19	7	23	3	71	3	37	7	3	11	3	29	47	43	.	3	13	3	7
606	3	131	3	.	.	3	19	3	13	17	47	.	3	7	3	.	137	3	7	3
07	79	3	.	3	.	.	7	67	3	.	3	.	7	3	89	3	31	.	11	163
08	7	13	19	.	3	11	3		29	3	17	3	23	107	.	.	3	7	3	.
09	3	.	3	47	.	3	41	3	19	11	7	17	3	13	3	71	7	3	181	3
10	.	3	.	3	7	227	79	173	3	157	3	103	17	3	13	3	.	199	107	.
611	.	.	23	7	3	31	3	.	11	3	131	3	193	17	7	43	3	11	3	19
12	3	.	3	11	.	3	197	3	7	71	29	233	3	.	3	167	.	3		3
13	19	3	.	3	43	.	109	7	3	13	3	.	.	3	17	3	11	29	7	13
14	13	7	11	41	3	.	3	.	.	3	13	3	7	.	.	17	3	.	3	89
15	3	.	3	.	.	3	11	3	23	67	139	7	3	.	3	11	17	3	31	3
616	.	3	.	3	197	7	.	83	3	.	3	37	.	3	.	3	7	17	103	11
17	.	37	.	151	3	13	3	19	223	3	163	3	.	31	11	7	3	61	3	29
18	3	11	3	7	.	3	13	3	.	7	43	.	3	19	3	199	59	3	11	3
19	41	3	7	3	.	11	.	31	3	29	3	.	.	3	.	3	.	47	13	7
20	11	.	.	229	3	53	3	7	.	3	23	3	.	7	47	29	3	31	3	.
621	3	7	3	61	11	3	7	3	.	79	97	13	3	11	3	.	.	3	37	3
22	7	3	13	3	23	19	71	73	3	.	3	7	61	3	199	3	167	7	.	.
23	.	23	127	11	3	7	3	47	97	3	7	3	11	.	13	89	3	43	3	23
24	3	19	3	.	7	3	.	3	179	.	.	43	3	.	3	7	11	3	.	3
25	71	3	11	3	73	.	19	13	3	7	3	11	.	3	7	3	.	53	.	59
626	31	.	7	.	3	223	3	29	7	3	233	3	19	.	.	11	3	71	3	7
27	3	.	3	97	.	3	23	3	41	.	11	67	3	7	3	37	.	3	7	3
28	.	3	239	3	.	37	7	.	3	.	3	227	7	3	11	3	61	109	.	31
29	7	11	157	13	3	79	3	.	.	3	71	3	.	.	.	.	3	7	3	73
30	3	17	3	.	19	3	.	3	59	.	7	.	3	199	3	13	7	3	.	3
631	11	3	137	3	7	83	13	181	3	11	3	.	23	3	179	3	29	13	.	.
32	19	43	17	7	3	41	3	151	13	3	.	3	.	11	7	19	3	167	3	.
33	3	.	3	17	.	3	.	3	7	127	.	61	3	241	3	.	.	3	.	3
34	107	3	23	3	17	.	.	7	3	.	3	13	11	3	.	3	173	.	7	.
35	103	7	13	.	3	17	3	11	151	3	.	3	7	13	.	.	3	19	3	.
636	3	53	3	.	13	3	.	3	.	41	37	7	3	43	3	.	.	3	.	3
37	37	3	103	3	.	7	11	43	3	.	3	23	.	3	227	3	7	.	131	.
38	67	.	.	19	3	.	3	13	23	3	11	3	127	193	29	7	3	181	3	11
39	3	31	3	7	167	3	47	3	17	7	.	137	3	109	3	61	89	3	.	3
40	13	3	7	3	29	.	.	79	3	17	3	139	.	3	19	3	.	107	11	7
641	.	.	.	83	3	11	3	7	.	3	29	3	13	7	.	.	3	23	3	43
42	3	7	3	13	179	3	7	3	.	11	17	.	3	.	3	53	239	3	113	3
43	7	3	139	3	11	13	191	59	3	.	3	7	.	3	31	3	19	7	71	.
44	.	.	43	73	3	7	3	23	11	3	7	3	17	.	59	.	3	11	3	.
45	3	.	3	11	7	3	.	3	13	31	.	.	3	17	3	7	.	3	13	3
646	17	3	19	3	.	.	.	11	3	7	3	.	71	3	7	3	11	.	31	23
47	73	13	7	31	3	.	3	239	7	3	211	3	.	.	17	67	3	.	3	7
48	3	.	3	79	37	3	11	3	.	29	.	.	3	7	3	11	.	3	7	3
49	.	3	17	3	13	167	7	.	3	43	3	181	7	3	13	3	17	103	.	11
50	7	.	67	17	3	.	3	31	.	3	59	3	151	37	11	.	3	7	3	.
651	3	11	3	23	17	3	.	3	.	.	7	.	3	.	3	19	7	3	11	3
52	23	3	.	3	7	11	.	.	3	13	3	29	97	3	.	3	109	.	17	13
53	11	.	.	7	3	163	3	131	.	3	13	3	.	151	7	23	3	.	3	17
54	3	29	3	67	11	3	17	3	7	233	41	.	3	11	3	43	79	3	.	3
55	.	3	.	3	53	.	173	7	3	23	3	.	.	3	.	3	107	11	7	.
656	.	7	.	11	3	13	3	97	17	3	.	3	7	19	.	13	3	179	3	.
57	3	47	3	19	.	3	13	3	89	17	.	7	3	157	3	.	11	3	19	3
58	.	3	11	3	67	7	.	199	3	19	3	11	.	3	41	3	7	131	13	.
59	.	101	.	71	3	.	3	41	37	3	17	3	.	.	19	7	3	.	3	31
660	3	13	3	7	31	3	.	3	.	7	11	13	3	.	3	.	29	3	157	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

66101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
661	7	.	.	.	3	17	3	37	11	3	89	3	13	41	.	19	3	7	3	29
62	3	239	3	11	73	3	23	3	.	47	7	103	3	107	3	.	7	3	31	3
63	.	3	61	3	7	13	17	11	3	29	3	19	113	3	.	3	11	.	.	43
64	23	.	11	7	3	.	3	17	127	3	181	3	.	31	7	29	3	13	3	.
65	3	73	3	.	227	3	11	3	7	.	71	.	3	.	3	11	.	3	13	3
666	.	3	43	3	59	29	.	7	3	17	3	.	23	3	37	3	103	.	7	11
67	.	7	41	19	3	.	3	137	.	3	53	3	7	.	11	.	3	31	3	.
68	3	11	3	.	71	3	109	3	.	19	17	7	3	13	3	89	.	3	11	3
69	149	3	23	3	13	7	61	.	3	.	3	17	.	3	13	3	7	.	.	.
70	11	.	37	113	3	19	3	29	.	3	97	3	17	.	43	7	3	.	3	.
671	3	.	3	7	11	3	41	3	.	7	19	.	3	11	3	.	.	3	83	3
72	17	3	7	3	.	.	.	.	3	13	3	23	.	3	71	3	19	11	.	7
73	13	17	.	11	3	83	3	7	23	3	13	3	11	7	17	.	3	.	3	[illegible]
74	3	7	3	.	.	3	7	3	.	191	.	.	3	.	3	17	11	3	.	3
75	7	3	11	3	.	181	107	251	3	.	3	7	.	3	.	3	17	7	.	31
676	.	67	.	17	3	7	3	.	19	3	7	3	.	47	239	11	3	17	3	61
77	3	79	3		7	3	13	3	241	.	11	89	3	.	3	7	.	3	37	3
78	.	3	.	3	19	17	73	.	3	7	3	.	29	3	7	3	179	.	13	19
79	.	11	7	59	3	113	3	23	7	3	.	3	.	.	41	.	3	.	3	7
80	3	13	3	47	23	3	17	3	251	.	59	13	3	7	3	19	.	3	7	3
681	11	3	13	3	.	.	7	17	3	11	3	193	7	3	61	3	.	83	.	23
82	7	241	.	.	3	.	3	.	17	3	.	3	31	11	13	.	3	7	3	139
83	3	167	3	83	.	3	53	3	11	17	7	.	3	23	3	37	7	3	41	3
84	73	3	67	3	7	37	31	13	3	53	3	41	11	3	.	3	89	.	.	.
85	.	61	.	7	3	131	3	11	.	3	17	3	.	19	7	.	3	.	3	13
686	3	31	3	19	.	3	59	3	7	163	13	11	3	.	3	.	83	3	19	3
87	23	3	127	3	.	.	11	7	3	19	3	.	13	3	.	3	53	.	7	.
88	107	7	83	13	3	.	3	.	.	3	11	3	7	17	19	23	3	43	3	11
89	3	.	3	.	137	3	.	3	41	157	.	7	3	29	3	13	71	3	.	3
90	.	3	151	3	.	7	13	.	3	23	3	.	.	3	17	3	7	13	11	29
691	43	19	29		3	11	3	.	13	3	.	3	73	257	47	7	3	.	3	.
92	3	.	3	7	67	3	19	3	.	7	37	107	3	.	3		17	3	.	3
93	37	3	7	3	11	.	.	103	3	181	3	13	19	3	.	3	.	17	31	7
94	.	.	13	31	3	41	3	7	11	3	.	3	.	7	23	.	3	11	3	37
95	3	7	3	11	13	3	7	3	19	37	251	23	3	31	3	.	197	3	17	3
696	7	3	47	3	151	67	43	11	3	.	3	7	179	3	83	3	11	7	257	17
97	47	43	11	.	3	7	3	13	113	3	7	3	103	137	.	.	3	97	3	19
98	3	29	3	.	7	3	11	3	.	13	.	.	3	.	3	7	211	3	.	3
99	13	3	53	3	.	151	139	29	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	113	11
700	.	.	7	.	3	53	3	.	7	3	239	3	13	59	11		3	89	3	7
701	3	11	3	13	.	3	.	3	.	.	23	19	3	7	3	.	.	3	7	3
02	.	3	.	3	61	11	7	23	3	.	3	.	7	3	.	3	.	19	199	.
03	7	229	167	.	3		3	19	.	3	.	3	53	61	37	31	3	7	3	103
04	3	23	3	181	11	3	67	3	13	.	7	.	3	11	3	.	7	3	13	3
05	.	3	.	3	7	107	151	97	3	109	3	.	251	3	.	3	23	11	19	.
706	17	13		7	3	241	3	.	.	3	.	3	11	23	7	.	3	41	3	31
07	3	17	3	.	31	3	.	3	7	197	107	.	3	13	3	127	11	3	263	3
08	101	3	11	3	13	19	23	7	3	.	3	11	193	3	13	3	.	.	7	.
09	.	7	17	23	3	.	3	.	.	3	19	3	7	89	.	11	3	61	3	.
10	3	19	3	17	.	3	47	3	29	.	11	7	3	251	3	.	19	3	23	3
711	97	3	211	3	17	7	19	.	3	13	3	.	83	3	11	3	7	.	.	13
12	13	11	31	.	3	17	3	229	67	3	13	3	19	.	.	7	3	191	3	.
13	3	113	3	7	29	3		3	73	7	.	.	3	.	3	.	.	3	.	3
14	11	3	7	3	.	.	17	.	3	11	3	.	61	3	.	3	199		37	7
15	127	.	23	43	3	13	3	7	37	3	.	3	233	7	.	13	3	29	3	.
716	3	7	3	101	19	3	7	3	11	67	41	83	3	.	3	71	31	3	.	3
17	7	3	.	3		.	29		3	17	3	7	11	3	23	3	.	7	13	157
18	19	59	.		3	7	3	11	.	3	7	3	109	29	.	19	3	.	3	.
19	3	13	3	.	7	3		3	23	71	17	11	3	.	3	7	.	3	.	3
720	89	3	13	3	107	23	11	.	3	7	3	17	.	3	7	3	61	.	.	109
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
661	83	3	7	3	.	109	127	.	3	.	3	.	17	3	11	3	.	37	53	7
62	97	11	59	173	3	23	3	7	.	3	191	3	79	7	13	151	3	.	3	167
63	3	7	3	.	.	3	7	3	31	.		41	3	.	3	197	13	3	67	3
64	7	3	.	3	41		.	13	3	11	3	7	19	3	17	3	.	7	29	.
65	61	.	19	101	3	7	3	.	.	3	7	3	139	11	.	17	3	.	3	13
666	3	.	3	191	7	3	163	3	11	61	13	131	3	.	3	7	17	3	.	3
67	.	3	241	3	101	.	179	23	3	7	3	43	11	3	7	3	.	17	.	67
68	.	.	7	13	3	.	3	11	7	3	.	3	47	.	211	.	3	151	3	7
69	3	23	3	.	29	3	167	3	193	.	.	11	3	7	3	13	31	3	7	3
70	19	3	.	3	.	199	7	47	3	.	3	.	7	3	73	3	23	13	229	17
671	7		.	239	3	47	3	.	13	3	11	3	.	23	.	.	3	7	3	11
72	3	109	3	103	.	3	137	3		.	7	19	3	61	3	.	7	3	173	3
73	47	3	193	3	7	31	23		3	89	3	13	43	3	79	3	.	19	11	.
74	37	.	13	7	3	11	3	19	109	3	.	3		13	7	.	3	.	3	.
75	3	43	3	.	13	3	.	3	7	11	.	.	3	19	3	.	257	3	23	3
676	.	3	29	3	11	71	157	7	3	31	3	.	53	3	113	3	13	139	7	.
77	.	7	.	.	3	.	3	13	11	3		3	7	.	53	.	3	11	3	151
78	3	.	3	11	79	3	.	3	67	13	103	7	3	.	3	29	.	3	43	3
79	13	3	.	3	.	7	.	11	3	101	3	.	157	3	.	3	7	.	97	53
80	17	.	11	.	3	29	3	43	.	3	19	3	13	103	.	7	3	149	3	.
681	3	17	3	7	.	3	11	3	.	7	79	29	3	41	3	11	19	3	47	3
82	131	3	7	3	.	13	19	233	3	67	3	.	.	3	23	3	47	31	163	7
83	.	29	17	197	3	137	3	7	.	3	101	3	19	7	11	.	3	13	3	.
84	3	7	3	17	223	3	7	3	13	.	.	31	3	.	3	.	.	3	11	3
85	7	3	179	3	17	11	.	191	3	47	3	7	.	3	107	3	113	7	.	181
686	11	13	71	.	3	7	3	.	43	3	7	3	173	.	.	149	3	73	3	.
87	3	197	3	29	7	3	.	3	.	97	.	109	3	11	3	7	.	3	89	3
88	31	3	37	3	13	.	17	61	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	.	.
89	19	53	7	11	3	.	3	17	7	3	23	3	11	101	149	19	3	.	3	7
90	3	199	3	53	.	3	.	3	17		67	37	3	7	3	59	11	3	7	3
691	.	3	11	3	23	.	7	263	3	13	3	11	7	3	43	3	.	.	.	13
92	7	23	.	.	3	.	3	113	53	3	13	3	29	79	193	11	3	7	3	23
93	3	223	3	43	139	3	71	3	.	173	7	.	3	.	3	.	7	3	29	3
94	199	3	.	3	7			127	3	.	3	17	.	3	11	3	.	.	.	.
95	157	11	.	7	3	13	3	73	29	3	41	3	17	149	7	13	3	.	3	79
696	3	.	3	41	.	3	13	3	7	19	.	59	3	17	3	227	.	3	.	3
97	11	3	79	3	.	.	.	7	3	11	3		31	3	19	3	101	71	7	223
98	23	7			3	19	3	109	107	3	.	3	7	11	17	47	3	37	3	.
99	3	13	3	.	43	3	31	3	11	167	19	7	3	47	3	17	.	3	.	3
700	.	3	13	3	.	7	.	41	3	79	3	.	11	3	109	3	7	29	191	.
701	29	31	.	17	3		3	11	47	3	.	3	.	.	13	7	3	17	3	.
02	3	163	3	7	17	3	29	3	.	7	31	11	3	67	3	.	13	3	.	3
03		3	7	3	71	17	11	13	3	.	3	.	.	3	59	3	43	.	17	7
04	.	47	.	.	3	31	3	7	19	3	11	3	.	7	.	.	3	157	3	11
05	3	7	3	37	41	3	7	3	.	.	13	163	3		3	.	73	3	227	3
706	7	3	.	3	19		.	17	3	29	3	7	13	3	.	3	223	7	11	19
07	139	.	173	13	3	7	3		17	3	7	3	37	.	71	29	3	.	3	83
08	3	.	3	59	7	3	.	3	131	11	.		3	73	3	7	.	3	31	3
09	.	3		3	11	29	13		3	7	3	.	.	3	7	3	.	13	.	.
10	227	41	7	.	3	179	3	.	7	3	17	3	.	31	67	.	3	11	3	7
711	3	.	3	11		3		3	.	103	109	17	3	7	3	257	.	3	7	3
12	43	3		3	.		7	11	3	263	3	13	7	3	.	3	11	.	83	37
13	7	.	11		3	.	3	23	149	3	137	3	41	13	.	.	3	7	3	.
14	3	.	3	19	13	3	11	3	.		7	.	3	.	3	11	7	3	19	3
15	.	3	163	3	7	.	59	.	3	19	3	31	47	3	17	3	13	.	.	11
716	137	79	131	7	3		3	13	.	3	229	3	43	97	7	17	3	.	3	.
17	3	11	3	73		3	43	3	7	13	.	179	3	23	3	.	17	3	11	3
18	13	3	181	3		11	.	7	3	41	3	.	.	3	.	3	29	17	7	.
19	11	7	47	227	3	.	3	79	.	3	167	3	7		.	193	3	.	3	.
720	3	.	3	13	11	3	19	3	97	.	.	7	3	11	3	.	.	3	17	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

72 101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
721	.	.	7	.	3	37	3	41	7	3	11	3	17	53	13	.	3	19	3	7
22	3	103	3	163	.	3	257	3	.	.	.	.	3	7	3	29	13	3	7	3
23	17	3	.	3	167	.	7	13	3	31	3	151	7	3	.	3	.	73	11	71
24	7	17	61	19	3	11	3	139	.	3	23	3	.	113	17	107	3	7	3	13
25	3	.	3	31	59	3	127	3	47	11	7	29	3	.	3	17	7	3	.	3
726	79	3	17	3	7	.	.	101	3	.	3	59	13	3	19	3	17	.	.	.
27	.	23	.	7	3	19	3	.	11	3	.	3	257	.	7	.	3	11	3	23
28	3	47	3	11	17	3	.	3	7	.	19	67	3	173	3	13	23	3	97	3
29		3	.	3	.	17	13	7	3	.	3	233	.	3	.	3	11	13	7	.
30	37	7	11	.	3	.	3	.	13	3	103	3	7	199	.	.	3	.	3	17
731	3	41	3	29	113	3	11	3	.	83	.	7	3	.	3	11	.	3	193	3
32	71	3	19	3	179	7	211	17	3	37	3	13	67	3	.	3	7	.	89	11
33	23	.	13	.	3	167	3	157	17	3	.	3	.	13	11	7	3	71	3	41
34	3	11	3	7	13	3	.	3	.	7	101	97	3	.	3	23	271	3	11	3
35	31	3	7	3	19	11	.	37	3	.	3	.	23	3	151	3	13	251	.	7
736	11	89	.		3	.	3	7	83	3	17	3	29	7	.	211	3	.	3	47
37	3	7	3	.	11	3	7	3	.	13	.	17	3	11	3	19	37	3	29	3
38	7	3	23	3	31	223	97	.	3	.	3	7	17	3	47	3	41	7	.	.
39	67	263	.	11	3	7	3	193	29	3	7	3	11	17	107	.	3	.	3	73
40	3	43	3	13	7	3	.	3	.	79	.	181	3	101	3	7	11	3	.	3
741	.	3	11	3	37	13	137	19	3	7	3	11	.	3	7	3	151	.	53	.
42	.	.	7	.	3	47	3	.	7	3	199	3	.	19	61	11	3	13	3	7
43	3	67	3	19	.	3	.	3	13	.	11	239	3	7	3	79	17	3	7	3
44	47	3	37	3	.	.	7	.	3	19	3	263	7	3	11	3	.	17	109	.
45	7	11		.	3	269	3	43	.	3	.	3	.	73	19	131	3	7	3	127
746	3	61	3	.	.	3	29	3	71	.	7	37	3	13	3	101	7	3	17	3
47	11	3	.	3	7	.	.	.	3	11	3	.	.	3	13	3	31	41	.	17
48	131	19	239	7	3	79	3	23	.	3	.	3	.	11	7	67	3	.	3	29
49	3	.	3	173	23	3	19	3	7	.	31	.	3	.	3	137	.	3	149	3
50	179	3	107	3	.	.	.	7	3	13	3	.	11	3	.	3	.	101	7	13
751	13	7	19	.	3	31	3	11	43	3	13	3	7	.	227	29	3	163	3	.
52	3	157	3	.	.	3	.	3	19	.	.	7	3	23	3	.	67	3	47	3
53	257	3	.	3	127	7	11	109	3	.	3	.	71	3	.	3	7	59	.	151
54	.	.	.	73	3	13	3	53	199	3	11	3	.	241	.	7	3	37	3	11
55	3	.	3	7	.	3	13	3	.	7	.	47	3	.	3	.	.	3	31	3
756	19	3	7	3	.	83	.	.	3	47	3	.	53	3	43	3	.	67	11	7
57	17	.	.	.	3	11	3	7	.	3	41	3	.	7	53	23	3	.	3	211
58	3	7	3	41	47	3	7	3	.	11	191	13	3	.	3	181	149	3	73	3
59	7	3	13	3	11		89	31	3	23	3	7	.	3	.	3	.	7	173	53
60	.	.	17	29	3	7	3	19	11	3	7	3	.	139	13	.	3	11	3	113
761	3	.	3	11	7	3	103	3	163	.	269	.	3	19	3	7	13	3	.	3
62	181	3	.	3	17	.	199	11	3	7	3	31	.	3	7	3	11	.	19	.
63	41	.	7	137	3	17	3	167	7	3	127	3	37	.	23	97	3	.	3	7
64	3	.	3	109	43	3	11	3	.	.	13	23	3	7	3	11	.	3	7	3
65	113	3	.	3	.	19	7	.	3	59	3	103	7	3	.	3	.	.	41	11
766	7	.	.	13	3	23	3	17	193	3	19	3	.	197	11	173	3	7	3	.
67	3	11	3	79	41	3	.	3	17	73	7	277	3	.	3	13	7	3	11	3
68	.	3	89	3	7	11	13	.	3	17	3	.	.	3	.	3	43	13	.	31
69	11	53	.	7	3	.	3	.	13	3	43	3	19	107	7	47	3	.	3	.
70	3	.	3	53	11	3	.	3	7	.	17	.	3	11	3	41	.	3	.	3
771	.	3	83	3	29	59	67	7	3	233	3	13	137	3	.	3	.	11	7	179
72	.	7	13	11	3	.	3	37	31	3	29	3	7	13	.	.	3	.	3	.
73	3	23	3	97	13	3	.	3	167	.	53	7	3	17	3	.	11	3	.	3
74	17	3	11	3	199	7	.	.	3	139	3	11	.	3	211	3	7	43	.	.
75	19	17	179	.	3	.	3	13	.	3	.	3	31	23	17	7	3	.	3	41
776	3	71	3	7	.	3	.	3	.	7	11	149	3	29	3	17	.	3	.	3
77	13	3	7	3	.	.	23	.	3	.	3	19	.	3	11	3	17	.	.	7
78	.	11	29	17	3	.	3	7	59	3	223	3	13	7	277	.	3	17	3	.
79	3	7	3	13	17	3	7	3	67	29	149	.	3	.	3	59	41	3	23	3
780	7	3	.	3	181	13	.	61	3	11	3	7	.	3	73	3	.	7	17	.
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
721	23	3	59	3	.	7	.	.	3	.	3	89	19	3	37	3	7	11	23	17
22	.	.	19	11	3	127	3	.	.	3	.	3	11	41	.	7	3	13	3	197
23	3	.	3	7	269	3	.	3	13	7	157	.	3	.	3	191	11	3	13	3
24	53	3	7	3	.	233	.	.	3	23	3	11	.	3	173	3	71	.	.	7
25	.	13	37	.	3	149	3	7	31	3	.	3	181	7	29	11	3	229	3	19
726	3	7	3	113	.	3	7	3	.	.	11	.	3	13	3	.	157	3	139	3
27	7	3	31	3	13	.	.	53	3	61	3	7	73	3	11	3	83	7	.	43
28	263	11	41	.	3	7	3	.	.	3	7	3	31	.	23	.	3	.	3	269
29	3	.	3	.	7	3	131	3	43	.	.	19	3	59	3	7	47	3	.	3
30	11	3	43	3	.	.	31	89	3	7	3	.	107	3	7	3	.	19	67	13
731	13	191	7	149	3	23	3	19	7	3	13	3	.	11	163	.	3	53	3	7
32	3	17	3	.	61	3	41	3	11	47	.	127	3	7	3	83	.	3	7	3
33	.	3	109	3	.	.	7	.	3	239	3	.	7	3	.	3	79	23	19	29
34	7	.	17	.	3	13	3	11	.	3	.	3	197	.	43	13	3	7	3	67
35	3	.	3	17	.	3	13	3	.	29	7	11	3	.	3	.	7	3	.	3
736	.	3	73	3	7	19	11	23	3	.	3	.	.	3	31	3	59	.	13	.
37	.	131	.	7	3	17	3	71	.	3	11	3	89	.	7	113	3	109	3	11
38	3	13	3	.	233	3	.	3	7	31	.	13	3	.	3	37	19	3	.	3
39	.	3	13	3	.	37	17	7	3	.	3	29	167	3	241	3	23	61	7	.
40	.	7	103	31	3	11	3	17	.	3	.	3	7	23	13	43	3	.	3	.
741	3	29	3	.	.	3	.	3	17	11	.	7	3	31	3	.	13	3	.	3
42	41	3	.	3	11	7	23	13	3	17	3	.	59	3	.	3	7	.	.	191
43	149	.	.	23	3	.	3	31	11	3	.	3	.	.	73	7	3	11	3	13
44	3	.	3	7	19	3	113	3	.	7	13	71	3	211	3	.	163	3	23	3
45	.	3	7	3	.	173	.	11	3	.	3	17	13	3	.	3	11	97	.	7
746	19	.	11	13	3	197	3	7	89	3	53	3	17	7	.	19	3	113	3	.
47	3	7	3	.	.	3	7	3	.	23	37	.	3	17	3	11	29	3	.	3
48	7	3	.	3	.	43	13	.	3	.	3	7	103	3	.	3	.	7	.	11
49	241	17	23	.	3	7	3	61	13	3	7	3	97	167	11	31	3	19	3	37
50	3	11	3	47	7	3	271	3	41	37	193	.	3	.	3	7	61	3	11	3
751	223	3	17	3	.	11	.	.	3	7	3	13	.	3	7	3	17	.	29	139
52	11	.	7	17	3	73	3	.	7	3	.	3	83	13	79	.	3	17	3	7
53	3	.	3	179	11	3	.	3	23	19	.	43	3	7	3	.	.	3	7	3
54	197	3	61	3	59	17	7	163	3	71	3	.	7	3	19	3	13	11	17	103
55	7	.	.	11	3	19	3	13	.	3	.	3	11	.	131	269	3	7	3	17
756	3	.	3	.	29	3	17	3	31	13	7	.	3	.	3	.	7	3	59	3
57	13	3	11	3	7	239	.	17	3	.	3	11	.	3	.	3	19	.	.	229
58	101	.	31	7	3	107	3	.	17	3	23	3	13	.	7	11	3	29	3	71
59	3	151	3	13	37	3	.	3	7	17	11	.	3	.	3	.	.	3	.	3
60	59	3	19	3	23	13	29	7	3	127	3	.	.	3	11	3	.	47	7	.
761	271	7	.	.	3	.	3	59	19	3	17	3	7	29	47	61	3	13	3	23
62	3	.	3	.	.	3	53	3	13	89	83	7	3	.	3	.	23	3	13	3
63	11	3	29	3	19	7	.	.	3	11	3	.	17	3	.	3	7	79	241	19
64	89	13	101	157	3	.	3	47	.	3	31	3	.	11	.	7	3	.	3	227
65	3	37	3	7	.	3	23	3	11	7	73	.	3	13	3	19	191	3	.	3
766	.	3	7	3	13	31	.	43	3	.	3	.	11	3	13	3	53	271	.	7
67	23	.	.	59	3	29	3	7	.	3	.	3	.	7	31	17	3	41	3	61
68	3	7	3	151	101	3	7	3	.	.	59	11	3	.	3	23	17	3	131	3
69	7	3	41	3	.	.	11	19	3	13	3	7	23	3	167	3	.	7	37	13
70	13	29	251	263	3	7	3	.	37	3	7	3	.	19	157	127	3	.	3	11
771	3	.	3	19	7	3	.	3	.	229	71	113	3	79	3	7	.	3	17	3
72	67	3	23	3	.	.	.	.	3	7	3	.	109	3	7	3	.	37	11	17
73	.	103	7	.	3	11	3	.	7	3	.	3	223	.	19	13	3	193	3	7
74	3	73	3	29	71	3	13	3	.	11	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3
75	.	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	23	7	3	.	3	.	31	13	73
776	7	19	79	.	3	37	3	101	11	3	173	3	.	131	.	.	3	7	3	.
77	3	13	3	11	.	3	19	3	83	.	7	13	3	.	3	107	7	3	.	3
78	127	3	13	3	7	.	.	11	3	43	3	47	19	3	71	3	11	.	61	.
79	.	137	11	7	3	53	3	.	103	3	.	3	29	.	7	167	3	23	3	.
780	3	89	3	.	251	3	11	3	7	101	163	.	3	113	3	11	13	3	29	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

78101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
781	.	83	37	19	3	7	3	191	.	3	7	3	23	11	.	.	3	13	3	17
82	3	.	3	197	7	3	17	3	11	19	137	.	3	.	3	7		3	13	3
83	.	3	.	3	.	71	.	17	3	7	3	29	11	3	7	3	.	157		47
84	.	13	7	89	3	19	3	11	7	3		3	107	41	.		3	47	3	7
85	3	29	3	.	.	3	.	3	233	17	19	11	3	7	3	.	.	3	7	3
786	83	3	.	3	13	127	7	29	3	.	3	61	7	3	13	3	19	.	31	.
87	7	211	.	31	3	.	3	223	.	3	11	3	131	43	.	71	3	7	3	11
88	3	.	3	.	53	3	269	3	23	.	7	17	3	31	3	.	7	3	37	3
89	.	3	19	3	7	23	53	.	3	13	3	.	17	3	193	3	.	89	11	13
90	13	199	41	7	3	11	3	31	19	3	13	3	.	17	7	.	3	.	3	137
791	3	.	3	239	.	3	61	3	7	11	67	53	3	.	3	.	29	3	.	3
92	.	3	103	3	11	113	37	7	3	227	3	.	.	3	17	3	.	109	7	19
93	.	7	71	.	3	13	3	.	11	3	23	3	7	.		13	3	11	3	.
94	3	271	3	11	.	3	13	3	43		.	7	3	.	3	19	17	3	53	3
95	107	3	43	3	23	7	131	11	3	281	3	67	.	3	.	3	7	17	13	.
796	.	23	11	.	3	.	3	103		3	.	3	.	.	97	7	3	73	3	23
97	3	13	3	7	79	3	11	3	29	7	61	13	3	71	3	11	23	3	17	3
98	.	3	7	3	.	.	.	19	3	.	3	.	97	3	29	3	.	.	.	7
99	.	.	.	41	3	157	3	7	229	3	257	3	67	7	11	.	3	.	3	31
800	3	7	3	19	29	3	7	3		43	79	191	3	163	3	.	13	3	11	3
801	7	3	.	3	.	11	113	13	3	19	3	7	227	3	127	3	.	7	.	.
02	11	139	.	.	3	7	3	97	.	3	7	3	.	.	19	.	3	29	3	13
03	3	131	3	.	7	3	.	3	31	47	13	.	3	11	3	7	.	3	.	3
04	37	3	.	3	191	97	29	137	3	7	3	.	13	3	7	3	257	11	.	.
05	79	19	7	11	3		3	73	7	3	.	3	11	29	.	43	3	239	3	7
806	3	.	3	149	.	3	19	3	.	37	.	.	3	7	3	13	11	3	7	3
07	.	3	11	3	43	.	7	53	3	89	3	11	7	3	.	3	263	13	.	.
08	7	.	19	.	3	211	3	.	13	3	131	3	.	.	229	11	3	7	3	.
09	3	17	3	.	.	3	.	3	19	.	7	.	3	.	3	29	7	3	61	3
10	.	3	59	3	7	.	.	.	3	.	3	13	.	3	11	3	.	.	.	.
811	.	11	13	7	3	29	3		23	3	31	3	.	13	7	41	3	53	3	19
12	3		3	17	13	3	241	3	7	.	43	29	3	.	3	.	137	3	113	3
13	11	3	.	3	17	31	233	7	3	11	3	167	.	3	163	3	13	.	7	.
14	.	7	127	.	3	17	3	13	.	3	107	3	7	11	31	.	3	23	3	79
15	3	149	3	.	37	3	.	3	11	13	.	7	3	.	3	67	73	3	.	3
816	13	3	79	3	.	7	17	.	3	31	3	.	11	3	.	3	7	19	.	.
17	.	.	.	101	3	41	3	11	71	3	.	3	13	37	.	7	3	43	3	.
18	3	179	3	7	23	3	.	3	17	7	47	11	3	19	3	.	223	3	.	3
19	.	3	7	3	101	13	11		3	17	3	.	.	3	.	3	67	.	19	7
20	43	.	.	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	.	.	3	13	3	11
821	3	7	3	47	157	3	7	3	13	41	17	.	3	23	3	.	.	3	13	3
22	7	3	.	3	229	19	.	.	3	.	3	7	.	3	.	3	.	7	11	233
23	.	13	.	53	3	7	3	263	191	3	7	3	17	281	137	.	3	67	3	.
24	3	19	3	23	7	3	73	3	.	11	139	31	3	13	3	7	19	3	29	3
25	17	3	.	3	11	109	19	179	3	7	3	.	.	3	7	3	59	197	23	.
826	.	17	7	.	3	.	3	.	7	3	53	3	19	.	17	23	3	11	3	7
27	3	191	3	11	107	3	181	3	.	.	.		3	7	3	17	97	3	7	3
28	31	3	17	3	.	.	7	11	3	13	3	113	7	3	.	3	11	37	.	13
29	7	.	11	17	3	.	3	283	101	3	13	3	127	239	197	.	3	7	3	109
30	3	.	3	.	17	3	11	3	61	.	7	79	3	43	3	11	7	3	.	3
831	.	3	41	3	7	17	.	43	3	101	3	97	59	3	.	3	71	29	17	11
32	19	.	.	7	3	13	3	.	.	3	.	3	.	.	7	13	3	.	3	17
33	3	11	3	227	.	3	13	3	7	97	103	23	3	167	3	.	.	3	11	3
34	.	3	.	3	239	11	.	7	3	.	3	19	.	3	.	3	181	.	7	.
35	11	7	113	37	3	23	3	47	17	3	101	3	7	103	.	139	3	19	3	29
836	3	13	3	.	11	3	.	3	.	17	241	7	3	11	3	.	.	3	233	3
37	.	3	13	3	97	7	.	.	3	29	3	101	31	3	.	3	7	11	83	89
38	47	181	43	11	3	.	3	79	109	3	17	3	11	.	13	7	3	.	3	191
39	3	.	3	7	.	3	31	3	.	7	23	17	3	.	3	.	11	3	127	3
840	167	3	7	3	.	29	.	13	3	73	3	11	17	3	19	3	31	229	.	7
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
781	31	3	.	3	47	.	.	7	3	.	3	.	37	3	41	3	.	.	7	11
82	17	7	139	.	3	61	3	23	29	3	.	3	7	.	11	79	3	59	3	13
83	3	11	3	127	23	3	.	3	109	181	13	7	3	103	3	43	277	3	11	3
84	19	3	67	3	31	7	.	131	3	97	3	.	13	3	.	3	7	53	.	23
85	11	.	17	13	3	251	3	.	.	3	.	3	179	.	89	7	3	.	3	53
786	3	.	3	7	11	3	97	3	151	7	29	19	3	11	3	13	.	3	.	3
87	61	3	7	3	17	79	13	227	3	37	3	.	.	3	.	3	.	11	.	7
88	29	.	.	11	3	17	3	7	13	3	.	3	11	7	.	.	3	.	3	257
89	3	7	3	23	281	3	7	3	157	151	.	.	3	19	3	.	11	3	197	3
90	7	3	11	3	173	.	17	37	3	107	3	7	31	3	.	3	139	7	19	83
791	.	.	13	.	3	7	3	17	41	3	7	3	.	13	.	11	3	.	3	29
92	3	41	3	.	7	3	31	3	17	.	11	.	3	.	3	7	37	3	179	3
93	73	3	.	3	61	19	.	139	3	7	3	.	163	3	7	3	13	.	.	.
94	.	11	7	181	3	229	3	13	7	3	19	3	.	61	101	29	3	.	3	7
95	3	19	3	.	.	3	251	3	47	13	17	.	3	7	3	.	19	3	7	3
796	11	3	.	3	37	29	7	.	3	11	3	17	7	3	.	3	.		.	
97	7	173	.	47	3	31	3	.	241	3	.	3	13	11	23	73	3	7	3	199
98	3	47	3	13	.	3	.	3	11	.	7	23	3	17	3	.	7	3	109	3
99	17	3	37	3	7	13	.	211	3	.	3	.	11	3	.	3	41	167	.	.
800	.	17	223	7	3	23	3	11	.	3	.	3	73	53	7	283	3	13	3	173
801	3	.	3	71	19	3	.	3	7	.	.	11	3	181	3	17	.	3	13	3
02	.	3	17	3	83		11	7	3	.	3	.	43	3	.	3	17	23	7	59
03	19	7	107	17	3	.	3	.	179	3	11	3	7	31	.	19	3	17	3	11
04	3	43	3	61	17	3	67	3	.	.	23	7	3	13	3	.	.	3	101	3
05	109	3	.	3	13	7	.	23	3	197	3	19	61	3	13	3	7	83	11	.
806	.	59		79	3	11	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7	3	19	3	17
07	3	23	3	7	.	3	17	3	37	7		.	3		3	.	173	3	43	3
08	233	3	7	3	11	.	193	17	3	13	3	31	29	3	47	3	23	41	.	7
09	13	.	73	19	3	.	3	7	11	3	13	3	47	7	109	.	3	11	3	107
10	3	7	3	11	103	3	7	3	.	17	.	89	3	.	3	131	83	3	.	3
811	7	3	.	3	277	.	23	11	3	.	3	7	.	3	19	3	11	7	.	
12	31	193	11	23	3	7	3	181	67	3	7	3	.	.	29	13	3	.	3	.
13	3	.	3	.	7	3	11	3	.	.	19	17	3	97	3	7	199	3	23	3
14	47	3	.	3	29	.	41	257	3	7	3	59	17	3	7	3	19	227	13	11
15	.	.	7	.	3	.	3		7	3	29	3	23	17	11	83	3	139	3	7
816	3	11	3	37	127	3	.	3	.	23	.	13	3	7	3	.	151	3	7	3
17	29	3	13	3	.	11	7	.	3	.	3	53	7	3	17	3	89	263	157	
18	7	.	23	109	3	71	3	.	19	3	41	3	37	.	13	17	3	7	3	.
19	3	.	3	41	11	3		3		.	7	73	3	11	3	163	7	3	167	3
20	.	3	31	3	7	137	.	13	3	.	3	211	79	3	23	3	103	11	53	19
821	113	.	29	7	3	.	3	127	.	3	37	3	11	.	7	.	3	.	3	13
22	3	83	3	43	.	3	.	3	7	29	13	.	3	107	3	19	11	3	17	3
23	.	3	11	3	.	23	31	7	3	.	3	11	13	3	.	3	47	.	7	17
24	41	7	.	13	3	.	3	.	.	3	67	3	7	.	.	11	3	.	3	.
25	3	31	3	.	.	3	.	3	.	71	11	7	3	269	3	13	.	3	151	3
826	.	3	.	3	131	7	13	19	3	47	3	29	89	3	11	3	7	13	41	
27	83	11	.	.	3	.	3	37	13	3	23	3	.	19	.	7	3	.	3	.
28	3	29	3	7	41	3	173	3	79	7	179	67	3	.	3	.	.	3	19	3
29	11	3	7	3	23	.	163	29	3	11	3	13	.	3	31	3	37	149	.	7
30	53	23	13	.	3	.	3	7	.	3	.	3	251	7	19	.	3	.	3	23
831	3	7	3	137	13	3	7	3	11	31	.	223	3	193	3	41	23	3	271	3
32	7	3	.	3	139	53	.	.	3	.	3	7	11	3	37	3	13	7	31	
33	17	19	.	31	3	7	3	11	263	3	7	3	199	.	61	.	3	89	3	.
34	3	17	3	.	7	3	19	3	.	13	.	11	3	31	3	7	29	3	.	3
35	13	3	.	3	.	.	11	193	3	7	3	.	19	3	7	3	.	179	.	41
836	23	.	7	269	3	.	3	31	7	3	11	3	13	67	53	.	3	127	3	7
37	3	61	3	13	.	3	211	3	19	.	.	199	3	7	3	23	.	3	7	3
38	71	3	.	3	17	13	7	.	3	.	3	37	7	3	149	3	.	43	11	53
39	7	37	59	113	3	11	3	.	131	3	79	3	137	.	.	47	3	7	3	19
840	3	.	3	.	.	3	.	3	13	11	7	83	3	47	3	.	7	3	13	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

84101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
841	37	31	151	241	3	19	3	7	.	3	.	3	.	7	.	11	3	.	3	13
42	3	7	3	107	.	3	7	3	.	.	11	.	3	131	3	.	61	3	.	3
43	7	3	.	3	59	.	.	.	3	37	3	7	13	3	11	3	19	7	.	.
44		11	.	13	3	7	3	29	.	3	7	3	.	23	.	17	3	.	3	.
45	3	.	3	.	7	3	223	3	.	.	181	137	3	.	3	7	17	3	59	3
846	11	3	7	3	211	191	13	37	3	7	3	.	.	3	7	3	53	13	47	.
47	.	71	7	23	3	.	3	.	7	3	193	3	.	11	.	101	3	83	3	7
48	3	137	3	.	.	3	89	3	11	271		41	3	7	3	43	37	3	7	3
49	59	3	197	3	19	.	7	.	3	163	3	13	7	3	157	3	29	173	.	17
50	7	167	13		3	151	3	11	.	3	.	3	23	13	.	277	3	7	3	.
851	3	.	3	.	13	3	47	3	.	23	7	11	3	.	3	19	7	3	.	3
52	.	3	139	3	7	.	11	31	3	.	3	.	29	3	.	3	13	.	.	163
53	197	.	23	7	3	.	3	13	41	3	11	3	.	.	7	61	3	31	3	11
54	3	41	3	223	.	3	229	3	7	13	.	.	3	37	3	.	43	3	.	3
55	13	3	37	3	233	.	.	7	3	.	3	31	.	3	23	3	113	131	7	.
856	.	7	.	59	3	11	3	.	.	3	.	3	7	19	29	.	3	.	3	41
57	3	.	3	13	.	3	.	3	23	11	59	7	3	.	3	83	179	3	19	3
58	239	3	53	3	11	7	.	.	3	19	3	.	.	3	.	3	7	.	.	293
59	17	.	271	.	3	53	3	151	11	3	29	3	.	.	19	7	3	11	3	61
60	3	17	3	7	.	3	.	3	13	7	.	.	3	227	3	97	139	3	13	3
861	29	3	7	3	.	.	.	11	3	71	3	43	.	3	.	3	11	.	277	7
62	.	13	11	.	3	73	3	7	151	3	23	3	53	7	83	.	3	.	3	.
63	3	7	3	17	.	3	7	3	37	.	173	131	3	13	3	11		3	79	3
64	7	3	71	3	13	.	103	89	3	.	3	7	19	3	13	3	.	7	137	11
65	.	23	19	.	3	7	3	241	31	3	7	3	.	.	11	.	3	37	3	23
866	3	11	3	257	7	3	37	3	19	29	.	.	3	41	3	7	23	3	11	3
67	277	3	31	3	.	11	17	.	3	7	3	.	43	3	7	3	127	.	223	13
68	11	61	7	47	3	.	3	17	7	3	13	3	31	71	.	37	3	.	3	7
69	3	43	3	233	11	3	23	3	17	.	.	.	3	7	3	.	227	3	7	3
70	19	3	167	3	.	.	7	173	3	17	3	29	7	3	.	3	.	11	61	.
871	7	.	.	11	3	13	3	.	.	3	151	3	11	.	79	13	3	7	3	.
72	3	29	3	37	.	3	13	3	.	.	7	19	3	83	3	23	7	3	43	3
73	67	3	11	3	7	.	.	29	3	.	3	11	23	3	.	3	167	19	13	113
74	71	.	.	7	3	61	3	19	.	3	.	3	17	.	7	11	3	.	3	157
75	3	13	3	.	.	3	.	3	7	.	11	13	3	17	3	.	.	3	.	3
876	17	3	13	3	79	.	41	7	3	.	3	.	.	3	11	3	.	.	7	.
77	.	7	229	139	3	239	3	.	.	3	37	3	7	59	13	.	3	.	3	47
78	3	.	3	277	.	3	137	3	53	31	71	7	3	.	3	17	13	3	107	3
79	11	3	17	3	.	7	.	13	3	11	3	23	.	3	47	3	7	.	31	37
80	.	.	.	17	3	283	3	.	23	3	19	3	47	11	.	7	3	17	3	13
881	3	19	3	7	17	3	.	3	11	7	13	.	3	31	3	53	19	3	181	3
82	193	3	7	3	.	17	19	47	3	.	3	83	11	3	.	3	.	79	17	7
83	.	227	233	13	3	47	3	7	.	3	.	3	19	7	.	.	3	23	3	17
84	3	7	3	211		3	7	3	29	.	.	11	3	191	3	13	59	3	241	3
85	7	3	67	3	61	.	11	17	3	.	3	7	223	3	29	3	37	7	.	73
886	41	251	.	.	3	7	3	23	13	3	7	3	263	61	151	137	3	.	3	11
87	3	107	3	43	7	3	79	3	.	17	83	.	3	89	3	7	.	3	.	3
88	.	3	.	3	.	.	.	.	3	7	3	13	211	3	7	3	73	.	11	23
89	19	.	7	67	3	11	3	.	7	3	17	3	113	13	.	19	3	29	3	7
90	3	.	3	.	13	3	.	3	.	11	127	17	3	7	3	269	.	3	7	3
891	.	3	.	3	11	.	7	.	3	.	3	19	7	3	.	3	13	97	239	59
92	7	.	37	.	3	.	3	13	11	3	.	3	.	17	.	233	3	7	3	31
93	3	.	3	11	31	3	.	3	179	13	7	.	3	157	3	41	7	3	47	3
94	13	3	29	3	7	.	.	11	3	223	3	37	.	3	17	3	11	.	23	.
95	.	37	11	7	3	.	3	.	.	3	.	3	13	.	7	17	3	151	3	149
896	3	.	3	13	.	3	11	3	7	19	.	47	3	.	3	11	17	3	157	3
97	271	3	109	3	283	13	73	7	3	23	3	53	61	3	19	3	43	17	7	11
98	89	7	31	.	3	19	3	.	.	3	43	3	7	.	11	.	3	13	3	.
99	3	11	3	.	47	3	.	3	13	.	19	7	3	139	3	.	53	3	11	3
900	.	3	.	3	.	7	.	.	3	.	3	197	.	3	179	3	7	127	53	17
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
841	19	3	23	3	7	.	17	73	3	41	3	.	.	3	29	3	.	59	269	.
42	173	13	109	7	3	.	3	17	11	3	71	3	271	89	7	31	3	11	3	.
43	3	67	3	11	29	3	239	3	7	139	.	19	3	13	3	.	.	3	37	3
44	79	3	.	3	13	.	.	7	3	17	3	23	.	3	13	3	11	19	7	.
45	.	7	11	.	3	103	3	19	23	3	83	3	7	41	251	.	3	29	3	31
846	3	.	3	.	31	3	11	3	227	.	17	7	3	19	3	11	.	3	.	3
47	.	3	131	3	.	7	29	103	3	13	3	17	149	3	.	3	7	.	19	11
48	13	53	.	.	3	113	3	.	.	3	13	3	17	29	11	7	3	23	3	73
49	3	11	3	7	.	3	.	3	31	7	.	.	3	17	3	37	.	3	11	3
50	17	3	7	3	.	11	257	97	3	241	3	149	.	3	.	3	.	.	43	7
851	11	17	31	.	3	13	3	7	53	3	19	3	103	7	17	13	3	.	3	.
52	3	7	3	.	11	3	7	3	71	269	53	107	3	11	3	17	19	3	.	3
53	7	3	17	3	.	.	19	.	3	59	3	7	.	3	103	3	17	7	13	23
54	.	.	97	11	3	7	3	.	127	3	7	3	11	73	.	53	3	17	3	193
55	3	13	3	67	7	3	41	3	.	83	.	13	3	23	3	7	11	3	.	3
856	97	3	11	3	.	17	.	.	3	7	3	11	47	3	7	3	.	67	17	43
57	.	29	7	191	3	139	3	199	7	3	31	3	.	109	13	11	3	.	3	7
58	3	.	3	23	19	3	17	3	43	79	11	157	3	7	3	.	13	3	7	3
59	23	3	43	3	67	31	7	13	3	149	3	127	7	3	11	3	.	113	23	.
60	7	11	47	41	3	89	3	.	17	3	.	3	59	.	31	19	3	7	3	17
861	3	101	3	29	.	3	199	3	.	17	7	.	3	.	3	79	7	3	.	3
62	11	3	.	3	7	.	281	.	3	11	3	19	13	3	.	3	.	.	.	211
63	.	.	.	7	3	67	3	.	.	3	17	3	.	11	7	.	3	19	3	.
64	3	.	3	31	.	3	.	3	7	43	.	17	3	197	3	13	.	3	67	3
65	41	3	101	3	.	107	13	7	3	.	3	.	11	3	.	3	131	13	7	.
866	73	7	193	19	3	79	3	11	13	3	.	3	7	17	23	.	3	.	3	181
67	3	.	3	101	53	3	.	3	.	19	107	7	3	.	3	59	229	3	29	3
68	.	3	.	3	.	7	11	.	3	109	3	13	283	3	17	3	7	31	113	67
69	.	89	13	.	3	19	3	.	29	3	11	3	.	13	37	7	3	.	3	11
70	3	263	3	7	13	3	83	3	.	7	19	31	3	.	3	73	17	3	251	3
871	.	3	7	3	43	101	67	61	3	179	3	.	.	3	.	3	13	17	11	7
72	.	.	.	71	3	11	3	7	197	3	.	3	.	7	191	41	3	.	3	.
73	3	7	3	.	199	3	7	3	41	11	23	59	3	.	3	31	281	3	17	3
74	7	3	19	3	11	149	47	23	3	.	3	7	.	3	89	3	.	7	59	17
75	29	.	.	.	3	7	3	67	11	3	7	3	13	.	.	.	3	11	3	251
876	3	23	3	11	7	3	29	3	.	73	43	.	3	.	3	7	.	3	.	3
77	.	3	127	3	19	13	.	11	3	7	3	61	41	3	7	3	11	.	.	19
78	59	.	7	103	3	41	3	.	7	3	.	3	.	23	.	179	3	13	3	7
79	3	281	3	.	.	3	11	3	13	.	.	97	3	7	3	11	.	3	7	3
80	191	3	173	3	107	83	7	.	3	29	3	.	7	3	59	3	137	.	37	11
881	7	13	199	23	3	131	3	.	37	3	.	3	109	163	11	29	3	7	3	89
82	3	11	3	.	.	3	61	3	103	41	7	43	3	13	3	.	7	3	11	3
83	53	3	149	3	7	11	97	19	3	67	3	.	31	3	13	3	157	37	.	109
84	11	197	53	7	3	.	3	.	.	3	103	3	23	19	7	107	3	.	3	.
85	3	17	3	19	11	3	31	3	7	23	101	283	3	11	3	.	.	3	19	3
886	.	3	.	3	.	.	.	7	3	13	3	71	.	3	131	3	31	11	7	13
87	13	7	17	11	3	37	3	29	.	3	13	3	7	47	19	.	3	.	3	.
88	3	.	3	17	.	3	.	3	181	.	31	7	3	.	3	103	11	3	.	3
89	.	3	11	3	17	7	43	.	3	193	3	11	101	3	23	3	7	.	.	61
90	.	19	.	29	3	13	3	.	.	3	281	3	229	.	.	7	3	41	3	139
891	3	.	3	7	163	3	13	3	23	7	11	257	3	101	3	.	79	3	191	3
92	149	3	7	3	.	23	17	.	3	.	3	73	19	3	11	3	29	.	13	7
93	199	11	19	193	3	.	3	7	.	3	139	3	.	7	.	71	3	.	3	.
94	3	7	3	.	137	3	7	3	17	131	.	13	3	43	3	109	.	3	31	3
95	7	3	13	3	.	.	.	43	3	11	3	7	29	3	101	3	.	7	.	.
896	37	.	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3	.	11	13	.	3	257	3	19
97	3	.	3	.	7	3	.	3	11	107	17	.	3	.	3	7	13	3	.	3
98	19	3	59	3	23	73	.	13	3	7	3	17	11	3	7	3	.	241	.	.
99	293	23	7	.	3	.	3	11	7	3	.	3	17	.	29	.	3	31	3	7
900	3	.	3	.	113	3	.	3	.	.	13	11	3	7	3	.	23	3	7	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

90101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
901	11	13	.	251	3	97	3	227	.	3	.	3	193	173	23	7	3	109	3	.
02	3	.	3	7	11	3	.	3	83	7		23	3	11	3	.	31	3	.	3
03	73	3	7	3	13	.	37	181	3	41	3	59	103	3	13	3	61	11	167	7
04	.	.	.	11	3	23	3	7	19	3	31	3	11	7	.	.	3	149	3	151
05	3	7	3	29	.	3	7	3	131	.	.	.	3	.	3	37	11	3	.	3
906	7	3	11	3	19	31	.	.	3	13	3	7	.	3	233	3	.	7	.	13
07	13	.	61	.	3	7	3	83	257	3	7	3	.	41	31	11	3	103	3	.
08	3	.	3	71	7	3	197	3	.	.	11	61	3	.	3	7	.	3	.	3
09	.	3	.	3	.	229	.	23	3	7	3	79	.	3	7	3	211	199	.	103
10	17	11	7	.	3	13	3	.	7	3	227	3	29	.	59	13	3	181	3	7
911	3	17	3	31	179	3	13	3	.	293	.	.	3	7	3	.	.	3	7	3
12	11	3	223	3	197	53	7	19	3	11	3	.	7	3	.	3	23	.	13	.
13	7	.	17	.	3	127	3	53	29	3	271	3	.	11	149	241	3	7	3	167
14	3	13	3	17	.	3	113	3	11	.	7	13	3	.	3	61	7	3	19	3
15	37	3	13	3	7	.	23	71	3	19	3	.	11	3	239	3	.	31	43	83
916	139	47	101	7	3	17	3	11	.	3	59	3	.	43	7	.	3	113	3	37
17	3	.	3	293	.	3	41	3	7	37	29	11	3	.	3	199	13	3	23	3
18	.	3	.	3	.	.	11	7	3	.	3	229	131	3	.	3	.	29	7	53
19	29	7	73	.	3	107	3	17	.	3	11	3	7	149	89	.	3	.	3	11
20	3	.	3	.	101	3	19	3	17	23	13	7	3	.	3	31	.	3	83	3
921	31	3	.	3	.	7	251	.	3	17	3	181	13	3	199	3	7	.	11	43
22	137	.	19	13	3	11	3	.	.	3	.	3	149	.	.	7	3	.	3	29
23	3	241	3	7	.	3	.	3	19	7	17	127	3	.	3	13	107	3	.	3
24	.	3	7	3	11	.	13	.	3	29	3	17	.	3	23	3	97	13	193	7
25	233	.	.	79	3	71	3	7	11	3	67	3	17	7	37	29	3	11	3	19
926	3	7	3	11	37	3	7	3	23	.	.	211	3	17	3	.	.	3	.	3
27	7	3	.	3	83	23	.	11	3	.	3	7	47	3	.	3	11	7	163	137
28		17	11	.	3	7	3	101	.	3	7	3	.	13	17	263	3	227	3	.
29	3	61	3	53	7	3	11	3	.	43	.	19	3	199	3	7	.	3	41	3
30	.	3	17	3	281	47	191	167	3	7	3	41	31	3	7	3	13	19	.	11
931	157	.	7	17	3	.	3	13	7	3	23	3	.	.	11	.	3	17	3	7
32	3	11	3	83	17	3	31	3	73	13	53		3	7	3	.	.	3	7	3
33	13	3		3	23	11	7	.	3	.	3		7	3	.	3	31	269	17	277
34	7	23	.	29	3	109	3	.	103	3	.	3	13	233	223	41	3	7	3	17
35	3	.	3	13	11	3	17	3	41	.	7	.	3	11	3	89	7	3	139	3
936	.	3	.	3	7	13	179	17	3	251	3	.	109	3	.	3	29	11	37	71
37	.	.	83	7	3	31	3	.	17	3	19	3	11	67	7	.	3	13	3	241
38	3	19	3		.	3	23	3	7	17	.	101	3	103	3	107	11	3	13	3
39	.	3	11	3	.	.	19	7	3	.	3	11	29	3	.	3	.	37	7	.
40	23	7	.	.	3	41	3	149	167	3	17	3	7	.	271	11	3	157	3	.
941	3	139	3	.	.	3	.	3	.	61	11	7	3	13	3	23	47	3	31	3
42	.	3	.	3	13	7	71	.	3	59	3	.	17	3	11	3	7	73	79	307
43	181	11	.	.	3	37	3	257	.	3	.	3	.	17	29	7	3	.	3	.
44	3	67	3	7	19	3	263	3	.	7	.	89	3	.	3	.	.	3	.	3
45	11	3	7	3	29	.	47	31	3	11	3	.	.	3	17	3	.	.	.	7
946	13	.	89	37	3	.	3	7	.	3	13	3	173	7	101	17	3	31	3	.
47	3	7	3	.	53	3	7	3	11	.	.	43	3	61	3	211	17	3	.	3
48	7	3	113	3	.	59	53	.	3	.	3	7	11	3	.	3	.	7	.	.
49	43	.	.	107	3	7	3	11	23	3	7	3	59	.	139	13	3	19	3	.
50	3	.	3	.	7	3	13	3	.	167	.	11	3	29	3	7	101	3	17	3
951	.	3	.	3	.	227	11	73	3	7	3	251	.	3	7	3	89	.	13	17
52	31	.	7	19	3	.	3	.	7	3	11	3		.	131	.	3	23	3	7
53	3	13	3	191	.	3	.	3	199	19	.	13	3	7	3	.	67	3	7	3
54	.	3	13	3	73	.	7	.	3	37	3	.	7	3	19	3	.	.	11	31
55	7	43	.	149	3	11	3	23	59	3	.	3	.	83	13	.	3	7	3	.
956	3	.	3	67	23	3	.	3	.	11	7	.	3	.	3	59	7	3	101	3
57	.	3	.	3	7	.	.	13	3	.	3	29	.	3	.	3	19	67	.	23
58	.	.	149	7	3		3	.	11	3	79	3	61	47	7	239	3	11	3	13
59	3	29	3	11	.	3	.	3	7	.	13	.	3	23	3	197	37	3	.	3
960	.	3	19	3	67	.	.	7	3	131	3	109	13	3	137	3	11	.	7	139
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	58	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
901	17	3	89	3	29	.	7	37	3	.	3	31	7	3	.	3	.	19	.	.
02	7	17	43	13	3	.	3	19	.	3	11	3	.	137	17	.	3	7	3	11
03	3	.	3	.	109	3	23	3	.	.	7	.	3	19	3	13	7	3	.	3
04	29	3	17	3	7	61	13	.	3	.	3	173	.	3	41	3	17	13	11	.
05	23	83	137	7	3	11	3	41	13	3	53	3	239	.	7	157	3	17	3	.
906	3	269	3	.	17	3	71	3	7	11	.	.	3	29	3	23	89	3	.	3
07	151	3	47	3	11	17	139	7	3	43	3	13	23	3	.	3	163	.	7	29
08	47	7	13	43	3	.	3	89	11	3	19	3	7	13	.	97	3	11	3	17
09	3	19	3	11	13	3	17	3	.	29	.	7	3	37	3	.	19	3	.	3
10	83	3	23	3	41	7	19	11	3	61	3	.	.	3	79	3	7	71	.	.
911	.	.	11		3	.	3	13	17	3	73	3	19	.	67	7	3	.	3	.
12	3	.	3	7	263	3	11	3	107	7	97	37	3	.	3	11	.	3	.	3
13	13	3	7	3	103	211	.	.	3	.	3	23	.	3	.	3	59	.	.	7
14	109	.	.	.	3	.	3	7	23	3	17	3	13	7	11	191	3	.	3	.
15	3	7	3	13	19	3	7	3	.	.	.	17	3	.	3	67	.	3	11	3
916	7	3	151	3	71	11	31	29	3	.	3	7	17	3	277	3	.	7	47	107
17	11	.	.	89	3	7	3	163	.	3	7	3	.	17	263	19	3	13	3	41
18	3	31	3	97	7	3		3	13	.	79	139	3	11	3	7	43	3	13	3
19	.	3	.	3	.	41	.	.	3	7	3	19	59	3	7	3	67	11	.	197
20	.	13	7	11	3	43	3	23	7	3	.	3	11	.	71	17	3	19	3	7
921	3	.	3	157	23	3	37	3	61	.	.	.	3	7	3	.	11	3	7	3
22	.	3	11	3	13	257	7	.	3	53	3	11	7	3	13	3	41	17	.	23
23	7	.		19	3	.	3		71	3	.	3	.	.	.	11	3	7	3	.
24	3	59	3	.	.	3	.	3	89	19	7	.	3	23	3	.	7	3	17	3
25	.	3	.	3	7	151	.	.	3	13	3	43	.	3	11	3	53	.	29	13
926	13	11	.	7	3	19	3	.	.	3	13	3	.	.	7	59	3	.	3	.
27	3	.	3	23	.	3	.	3	7	113	19	.	3	31	3	.	.	3	71	3
28	11	3	.	3	.	.	.	7	3	11	3	131	293	3	29	3	19	.	7	.
29	.	7	.	.	3	13	3	31	239	3	109	3	7	11	.	13	3	.	3	113
30	3	.	3	.	29	3	13	3	11	163		7	3	.	3	.	127	3	.	3
931	.	3	19	3	59	7	151	.	3	23	3	.	11	3	.	3	7	41	13	.
32	.	.	.	179	3	.	3	11	19	3	37	3	.	.	.	7	3	29	3	79
33	3	13	3	7	89	3	73	3	.	7	.	11	3	.	3	47	61	3	59	3
34	113	3	7	3	19	.	11	151	3	211	3	.	.	3	.	3	.	.	.	7
35	17	.	.	.	3	.	3	7	137	3	11	3	.	7	13	31	3	173	3	11
936	3	7	3	73	229	3	7	3	47	283	113	23	3	.	3	19	13	3	43	3
37	7	3	29	3	.	.	41	13	3	79	3	7	191	3	.	3	71	7	11	97
38	.	127	17	47	3	7	3	37	.	3	7	3	269	223	.	.	3	.	3	13
39	3	47	3	17	7	3	.	3	.	11	13	.	3	.	3	7	193	3	.	3
40	163	3	.	3	11	.	109	19	3	7	3	.	13	3	7	3	37	23	73	.
941	.	.	7	13	3	17	3	.	7	3	41	3	53	19	97	131	3	11	3	7
42	3	.	3	11	.	3	107	3	31	.	23	29	3	7	3	13	.	3	7	3
43	.	3	157	3	127	197	7	11	3	19	3	.	7	3	37	3	11	13	.	.
44	7	29	11	59	3		3	17	13	3	.	3	107	.	19	61	3	7	3	53
45	3	23	3		.	3	11	3	17	.	7	271	3	.	3	11	7	3	.	3
946	.	3	103	3	7	181	137	41	3	17	3	13	73	3	.	3	23	.	281	11
47	41	19	13	7	3	193	3	97	.	3	.	3	.	13	7	.	3	.	3	47
48	3	11	3	29	13	3	19	3	7	.	17	79	3	239	3	.	31	3	11	3
49	.	3	269	3	.	11	23	7	3	73	3	17	19	3	43	3	13	.	7	.
50	11	7	19	23	3	.	3	13	.	3	31	3	7	.	.	.	3	.	3	61
951	3	.	3	43	11	3	59	3	19	13	.	7	3	11	3	.	.	3	23	3
52	13	3	.	3	.	7	.	47	3	.	3	.	151	3	.	3	7	11	233	157
53	97	17	167	11	3	47	3	.	283	3	127	3	11	.	17	7	3	.	3	19
54	3	53	3	7	.	3	.	3	.	7	307	.	3	.	3	17	11	3	29	3
55	19	3	7	3	.	13	227	.	3	31	3	11	.	3	61	3	17	109	.	7
956		41	23	17	3	271	3	7	29	3	241	3	163	7	103	11	3	13	3	83
57	3	7	3	31	17	3	7	3	13	.	11	19	3	.	3	.	.	3	13	3
58	7	3	.	3	257	17	37	.	3	.	3	7	.	3	11	3	.	7	17	41
59	229	11	.	.	3	7	3	19	.	3	7	3	41	53	.	.	3	59	3	17
960	3	.	3	.	7	3	17	3	23	191	29	.	3	13	3	7	307	3	.	3
N	51	53	57	58	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

96101

N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
961	17	7	11	13	3	223	3	277	19	3	97	3	7	251		127	3	79	3	.
62	3	17	3	23	.	3	11	3	.	.	41	7	3	.	3	11	157	3	109	3
63	23	3	193	3	19	7	13	61	3	.	3	.	.	3		3	7	13	23	11
64	.	149	17	229	3	67	3	.	13	3	211	3	.	73	11	7	3		3	43
65	3	11	3	7	103	3		3	263	7	.	83	3	37	3	19	29	3	11	3
966	.	3	7	3	17	11	79	53	3	23	3	13	71	3	41	3	241	.	127	7
67	11	.	13	97	3	17	3	7	311	3	197	3	.	7	.		3	89	3	.
68	3	7	3	131	11	3	7	3	.	.	.	37	3	11	3	179	113	3		3
69	7	3	.	3	.	199	17	19	3	103	3	7		3	31	3	13	7	29	67
70	.	.	.	11	3	7	3	13	.	3	7	3	11	19	23	.	3	53	3	109
971	3	.	3	19	7	3	.	3	17	13	.	23	3	137	3	7	11	3	19	3
72	13	3	11	3	41	.	67	191	3	7	3	11	.	3	7	3	.	47	31	79
73	.	.	7	31	3	23	3	307	7	3	.	3	13	131	19	11	3	311	3	7
74	3	257	3	13	29	3	61	3	37	.	11	.	3	7	3	139		3	7	3
75	.	3	281	3	.	13	7	113	3	.	3	17	7	3	11	3	103	23	.	
976	7	11	.	.	3	.	3	31	41	3	233	3	17	89	163	251	3	7	3	.
77	3	41	3	199	.	3	19	3	13	79	7	.	3	17	3	43	7	3	13	3
78	11	3	47	3	7	.	29	23	3	11	3	.	19	3	227	3	.	.	.	
79	47	13	19	7	3	179	3		181	3		3	.	11	7	37	3	.	3	41
80	3	23	3	.	.	3	.	3	7	83	61	167	3	13	3	17		3	.	3
981	.	3	17	3	13	41	59	7	3	.	3	.	11	3	13	3	17	.	7	61
82	283	7	.	17	3	.	3	11	.	3	.	3	7	23	193	31	3	17	3	19
83	3	197	3	37	17	3	.	3	.	.	.	7	3	107	3	29	43	3	.	3
84	19	3	.	3	.	7	11	.	3	13	3	.	257	3	173	3	7		17	13
85	13	137	.	23	3	29	3	.	83	3	11	3	37	.	211	7	3		3	11
986	3	151	3	7	31	3	17	3	.	7	.	19	3	53	3	.		3	23	3
87	89	3	7	3	.	.	.	17	3	269	3	.	.	3	.	3	293	19	11	7
88	.	29	.	.	3	11	3	7	17	3	37	3	23	7	.	13	3	97	3	
89	3	7	3	.	.	3	7	3	31	11	.	.	3	19	3	.	163	3	.	3
90	7	3	181	3	11	.	.	83	3	.	3	7	167	3	97	3	.	7	13	37
991	113	.	23	.	3	7	3	.	11	3	7	3	.	.	.	.	3	11	3	.
92	3	13	3	11	7	3	47	3	313	.	67	13	3	.	3	7	.	3	61	3
93	199	3	13	3	47	19	.	11	3	7	3	71	17	3	7	3	11	41	.	.
94	.	107	7	.	3	89	3	37	7	3	19	3	.	17	13		3	277	3	7
95	3	19	3	151	191	3	11	3	23	.	.	.	3	7	3	11	13	3	7	3
996	103	3	.	3	.	23	7	13	3	.	3	67	7	3	17	3	37	.	251	11
97	7	179	.		3	.	3	.	.	3	31	3	19	.	11	17	3	7	3	13
98	3	11	3	.	151	3	.	3	173	.	7	.	3	.	3	.	7	3	11	3
999	.	3	.	3	7	11	41	163	3	.	3	.	13	3	37	3	139	17	89	127
N	01	03	07	09	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49

N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99
961	11	3	.	3	13	23	.	17	3	7	3		.	3	7	3	43	29	19	
62	29	101	7		3	.	3		7	3	43	3	.	11	73		3		3	7
63	3	.	3	167	173	3	29	3	11	17	.	31	3	7	3	113	41	3	7	3
64	.	3	.	3	.	19	7		3	13	3	.	7	3	.	3	47	.		13
65	7	.	.	223	3	61	3	11	269	3	13	3	.	59	.	.	3	7	3	29
966	3	19	3	163		3		3	.	277	7	11	3	109	3	31	7	3	.	3
67	31	3		3	7	.	11	.	3	29	3	.	17	3	.	3	151	43		
68	.	23		7	3	13	3	157	73	3	11	3	19	17	7	13	3		3	11
69	3	.	3	.	47	3	13	3	7	.	37	.	3	293	3	.	23	3		3
70	37	3	71	3	31	29	113	7	3	.	3	193	.	3	17	3	79	151	7	89
971	.	7	.	.	3	11	3	.	.	3	.	3	7	167		17	3	83	3	37
72	3	13	3	.	19	3	23	3	211	11	89	7	3		3	271	17	3	149	3
73	67	3	13	3	11	7	.	.	3	.	3	.		3	.	3	7	17	.	173
74	19	.	41	.	3	.	3	29	11	3	107	3	43	71	13	7	3	11	3	
75	3		3	7		3	43	3	.	7	.	.	3	.	3	23	13	3	17	3
976	.	3	7	3	61	127	101	11	3	.	3	19	23	3		3	11	211	151	7
77	239	67	11	29	3	59	3	7	.	3	.	3	277	7		.	3	19	3	13
78	3	7	3	.	.	3	7	3		97	13	.	3		3	11	53	3	223	3
79	7	3	23	3		163	.	313	3	.	3	7	13	3	.	3	29	7	43	11
80	71	31	.	13	3	7	3	281	101	3	7	3		43	11	47	3	233	3	263
981	3	11	3	103	7	3	89	3	127	19	31	.	3	47	3	7	149	3	11	3
82	.	3	.	3	97	11	13	.	3	7	3	23	29	3	7	3	227	13	.	
83	11	59	7	41	3	19	3	.	7	3	.	3	131	37	.	.	3	61	3	7
84	3	.	3	.	11	3	.	3	59	.	19	.	3	7	3	149	.	3	7	3
85	139	3	67	3	.	.	7	241	3	.	3	13	7	3	311	3	19	11	.	43
986	7	47	13	11	3	.	3	.	79	3	101	3	11	13	29	.	3	7	3	229
87	3	17	3	61	13	3	283	3	43	.	7	.	3	173	3	223	7	3	31	3
88	41	3	11	3	7	109	.	.	3	.	3	11	61	3	.	3	13	.	.	
89	53	.	17	7	3	.	3	13	19	3	29	3	.	31	7	11	3		3	.
90	3	.	3	17	23	3	157	3	7	13	11	.	3		3	.	197	3	41	3
991	13	3	229	3	17	53	131	7	3	.	3	41	.	3	11	3	.	281	7	19
92		7	.	.	3	17	3	53	37	3	.	3	7	101	43	.	3	31	3	109
93	3	73	3	13	67	3	.	3	.	43	.	7	3	23	3	19	.	3	.	3
94	11	3	271	3	79	7	17	.	3	11	3	31	53	3	.	3	7	37	.	29
95	.	113	29	.	3	.	3	17	.	3	.	3	.	11	53	7	3	13	3	137
996	3	227	3	7	.	3	.	3	11	7	263	.	3	83	3		131	3	13	3
97	23	3	7	3	.	67	.	19	3	17	3	113	11	3	.	3	73	.	23	7
98	31	13	61	.	3	37	3	7	.	3	.	3	.	7	59	23	3	191	3	283
999	3	7	3	19	.	3	7	3	.	257	17	11	3	13	3			3	19	3
N	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79	81	83	87	89	91	93	97	99

索 引

Ahrens 阿廉斯 6,31,35,36,108,243,247,424,427
Einstein 爱因斯坦 201
Apinanus 阿皮安斯 352
Abu-Kamil 阿部-卡米勒 58
Abul-Wefa 艾部-瓦法 351
Aryabhata 阿耶波多 114,351
Alcuin 阿尔库因 40,58,424
Archimedes 阿基米德 207,250
Andoyer 安德耶 343,349,350,355
Ambrose 阿穆波罗思 6
会田安明 145
安岛直圆 342—344,378,379
安部元章…299,362,371,375,376,381—383,405,410
安部道雄 219,220
阿部乐方 423
荒木村英 18
有马赖徸 18,58,369
天文学大集 350,351
吾妻镜 83
Abacus 阿巴卡斯 312,321
Abbot 阿波特问题 58
猜谜之算 67
安岛直圆的对数 342
阿尔热巴拉 178
阿尔热巴达 178
分油之算 29
暗语 5
暗码数字 186,428

伊藤东涯 165
石黑信由 146,173
泉行藏 391,399,400
礒村吉德 48,132,135,140,270,271,288
今村知商 48,90,91,137,288

今村谦吉 179
异制庭训往来 4,21,28
今昔物语 83
因归算歌 48,90—91,94,137
印度问题 114
遗题承继 136
入子算 98

Vieta 韦达 352
Vitruvius 维托陆维斯 162
浦田繁松 170,244,295,362,372,391,394,396,400,405,406,423,425,427,428,430
宇治拾遗物语 83
Emerson 亚麻逊 202
江口雅彦 295
圆月和尚 83
远藤盛俊 155
远藤利贞 140
益智图 231
延喜式 150—152
圆周率的历史 154,164,354,356
圆方四卷记 140
Eratosthenes 埃拉托塞尼的筛子 363
易 124
鸳鸯游戏 106
圆锥积 270
圆箭 268

Euler 欧拉 195,198,257,352,364,365,372,377
Valentin Otto 瓦廉亭·欧托 352
王鉴古 294
王国维 168
小高吉三郎 426
小山田与清 309
太田道灌 87,88
荻生徂徕 165
大江俊矩记 227
男重宝记 21
欧拉公式 366
狼渡船 39
折纸几何 232

Cajori 卡约里 42
Kaván 374
Cardan 卡尔旦 125
Kant 孔德 195
Cantor 康托尔 426
Gauss 高斯 195,235,377
郭沫若 168,169
韩信 62,63
镰田俊清 328
鸭长明 325
狩谷棭斋 165,168

环中仙　14,23—25,113,208,224,225,242,248
含灵轩　226
改算记　45,47,57,138—140,205,206,209,270,319
开元占经　351
解见题之法　289
格致算书　57
作数　394
数与算盘　410
括要算法　273,276,278
割圆十分表　356
割圆八线表　353—355
龟井算　318
宽政历　154
勘者御伽双纸　21,22,26,36,38,58,63,85,106,125,127,131,209,213,214,243,336,337,402,424
竿头算法　358
捉迷藏游戏　12
龟井算　318
乌鸦算　40
歌诀　95
过不足算　96
加留田十落　17
开度　55
开方之歌　92
开方法　327
开方式　181
角的三等分问题　250
曲尺　251,334
曲尺刻度　335
曲尺开立方　339
完全数　194
许慎　170,428
姜保　312
喜多村信节　28
岸俊雄　179
尧庆　3
几何学首　180
几何原本　179,180
嬉游笑览　28
九章算经　166
九章算术　28,103,176,180—182,287,323—325
九章算法　83
九章详注比类大全　465
求笑算法　405,424
希腊拼图游戏　224
盗和服人算　102
几何　179
规矩术　335
归除法　313
九连环　125
京枡　164

Clavius　克拉维乌斯　179

Kraichik 364,369,425
Glaisher 366,367,374
日下诚 342
久留岛义太 198,357,369
愚管抄 325
具注历 152
口游 78,79,268,269
群书类从 82
九九 78
9 的游戏 390
久留岛-有马定理 368
分组 36

开普勒 Kepler 346
开尔文 Kelvin 199
玄惠法印 22
华严经 174
形学备旨 180
形学补编 180
揭楣算法 146
阙疑抄之答术 140
元亨释书 21
元和航海书 31
源氏物语 84
计子术 17
圭垛 18,271
鸡兔算 49
击鼓射字 28
结绳 320
原 18
弦表 350
Corrigan 361
Korteweg 191
Compt 196
Goldbach 哥德巴赫 371
吴敬 428
贾亨 95
绛县老人 321
古贺卜二郎 192
虎关师炼 21
后藤算斋 145
幸田露伴 142
近藤守重 354
勾股弦钞 134,135
古今算法记 140,141
古事类苑 426
五重塔 142
后拾遗集 87
互对演段 369
好书故事 354
今昔物语 83
罗扎木的聪明人 106
被炉问题 220
勾股弦 292
古枅 164
小町算 400
后子立 4
合数 363

佐久间久四郎 145
斋藤重基 145
斋藤宜义 146
坂部广胖 48
境新 303,396,399,400,423
泽口一之 140
泽田吾一 165,166,168,426
散华袋 213
赛祠神算 146,147
三十二番职人歌合 83
算学启蒙 48,266,268,312,319,327
算学勾致 146,173
算学正义 80
算元记 30,104,205,209,328
算俎 16,140
算脱之法 8
算梯 357
算法阙疑抄 48,138—140,270,288
算法根源记 140
算法至源记 140
算法新书 289,331
算法全能集 95,311
算法玉手箱 107,187—189,216,243,424
算法珍书 49
算法点串指南录 48
算法统宗 41,42,44,47,48,62,94—97,103,104,120,186,287,312,428
算法童子问 3,12,14,49,85,86,187,424
算法勿惮改 142,288
算法便览 87
算法明解 140
算用记 29,90,137
参两录 140
左左立 26
骰子 74,84
萨子 4
三角函数之名 352
三角衰垛 271
三百十五减算 64
三方锥积 270
算置,算所 82
算额 142
算木,算盘 320
算筹 320

Sissa ben Dahir 44
Josephus 约瑟夫斯 6—8,16,427
Sylvester 西尔维斯特 201
释迦 174,176
朱世杰 48,266,273,312
秋芬室 231
诸葛孔明 42,248

徐岳　172,311
徐光启　179,180,207,352
睫巢　231
秦九韶　177
清水义雄　145
柴田清亮　180
柴村藤左卫门　57
涉川景右　154
涉川春海　154,155
白石长忠　146
四元玉鉴　273
四库全书目录　312
七巧图合璧　229
七巧八分图　231
社寺奉纳算额集　145
社盟算谱　146
竖亥录　90,91,137,288
授时历捷法立成　312
周髀算经　161,162,285—287,292
拾芥抄　79,160
拾玑算法　18,20,58,369
拾珍御伽机训蒙鉴　213
集古图　167
十二段草纸　21
贞享历　154
润背　166
初心算法早传授　213
诸勘分物　164,318
神壁算法　146
真元算法　215,258
新刊算法起　94
新中国报　362
新编诸算记　318,319
新编百分表　356
新编尘劫记　220
尘劫记　1—3,7,22,23,29—33,40,43,45—47,50,52,59,61,62,90,94,98,99,101,102,127,128,137,140,167,172,173,176,267,269,270,287,327,328,336,425
约瑟夫斯问题　5,427
4 的游戏　394
记时法　148
七桥问题　255
七人番所　104
实　182
岛立　36
借根法　178
十字架　222
十不足　38
循环小数　378
商　182
商除法　313,317
猩猩火　205
新风流继子立　14
神壁算法　142,146

亲和数 194

D. E. Smith 史密斯 4,7,192,426
Smogolenski 346
Surya 351
崇祯历书 353
数学九章 177
数学启蒙 177
数学奥林匹克 396
数术记遗 172,311—313
数理神篇 146
数理精蕴 347,353
数学 177
杉成算 266

Theon 席文 350
Ceva 塞瓦 354
清少纳言 151,226
关孝和 8,11,17,18,91,139—141,143,197,203,239,269,271,273,277,278,289,333
西洋算法比例法 179
制度通 165
精要算法 89,90,304,357
说文解字 170,428,429
宣明历 149
阐微算法 20
清少纳言七巧板 226
圣数 194
关孝和—贝努利数 277
宣旨枡 167

巢睫 231
孙子 47,60
曾吕利新左卫门 43—45
走盘集 312
测量全义 207,209,352,353
孙子算经 41—43,47,48,60,61,63,79,103
增修日本数学史 140
增补算法阙疑抄 132,135,288
续·数与算盘 299,375,410
续神壁算法 146
算盘 309
素数 363
素因数分解 380
苏州码 186,429

Tartagl 达塔利亚 31,40,66
Datta 174
Tan 428
田中由真 405,424
田原嘉明 94
高木茂男 362,425

高阶俊平　83
高桥至时　154
高原吉种　91,140
武田济美　20
武田真元　87,88,215,258
建部贤弘　8,11,18,141,197,203,354,355
玉泉大梁　166,168
代数学　178
代数学阶梯　179
代数学启蒙　179
宅间流圆理　328
脱子术　4
脱数　8
椭圆　329
垛术　271
对数　310
代数　177
达塔利亚问题　66
达塔利亚分油问题　31
裁剪组合　204
表杉算　266

许凯　Chuquet　31
张丘建　56
赵君卿　161
千叶胤秀　331
千叶六郎　144
茶室实寿　356
中国古代数学史料　351,426
中国算学史　169,426
中算史论丛　126
昼夜长短之图　155
张丘建算经　56
国际象棋棋盘问题　247
七巧板　225,428
聪明的和尚　246
竹束问题　268

塚本明毅　178
土御门泰邦　154
鹤冈放生会职人歌合　82
徒然草　1,4,7,14,21,74
徒然草诸抄大全　1
积算　46,52
鹤龟算　47

Tait　泰特　108,109,111
De Morgan　德莫根　178,197,390,426
Diopnantus　丢番图斯　118,119,294
Descartes　笛卡儿　190,196
Deprez　343
Duarte　343,348
Dudeney　杜德尼　33,247,409,424,428
Delennoy　德兰诺伊　109,

111
程大位 41,47,6,95,287,312,482
寺村周太郎 295
天智天皇 150
缀术算经 203
天学会通 346
天保历 154
泰特问题 108
Decimatio 方法 7
定时法 149
粘叶缀 95
点窜术 141,177

Thompson 347,348
Ptolemy 托勒密 350
户板保佑 145
道惠和尚 83
丰臣秀吉 44,164
唐开元占经 351
唐土秘事海 215
童介抄 140
时津风 229
土耳其人和基督教徒问题 5
十不足 38
铜斗 166
年当算 65
捉迷藏 241

拿破仑 Napoleon 196
南秉吉 80
内藤政树 198
田中高宽 229
中根元圭 18
中根彦循 18,22,36,58,85,106,125,127,131,209,212,131,209,212,213,243,336,358,402,404,424
中村时万 146
中村正直 180
奈良朝时代民政的数的研究 166,168
并物 229

Nicomachus 尼克玛卡斯 118
Newton 牛顿 195,199
二中历 4,8,22
日本书纪 325
日本数学史讲话 426
日本钟表 158
日本游戏 426
日本风土记 83
二进制 122
日本数学会社 177

小偷的隐藏 104
小偷算 102

布盗算　102

Napier　纳皮尔　340,344—347

鼠算　50

Hadwiger　219
Hartsinguis　191,192
Bhaskara　巴斯卡拉　58,97,114,294
Bachet　巴舍　31,32,105,424
Valentin Otto　352
Pascal　帕斯卡　18,253
Pappus　帕普斯　250
梅文鼎　239
马杰　428
土师民三郎　391
桥本万平　151,152
长谷川宽　289,331
长谷川邻完　145
鸠野宗巴　192
塙保己一　82
林鹤一　108,109,111,112,378,425
八线表谚解　354
发微算法　139—141,143
发微算法演段谚解　141,197
林鹤一博士和算研究集录　83,108,141,180,193,291,343,344,356,373,377,428
盘珠集　312
巴舍问题　31
帕斯卡三角数　273
Paradox　悖论　385
伸缩绘图器　254
配数　343
倍增问题　151
八卦　124
八线表　353

Hippias　250
Hipparchus　希帕卡斯　350
Fibonacci　斐波那契　52,53
Buergi　344—346
Pythagoras　毕达哥拉斯　119,279,285,292,294
平山谛　22,154,164,317,356,428
平山清次　157,158
比例对数表　346
笔算训蒙　178
笔算通书　179
姬百合　21
斐波那契级数　52,53
拾物　241
毕达哥拉斯学派　194
毕达哥拉斯数　294,293,295

毕达哥拉斯定理 119,181,285,292
尾约数 378
一笔算 255
百鸡问题 56
百五减算 60,135
Fourrey 夫瑞 33,424
Fermat 费马 297,364,369,372,377
Vlacq 345,346
Brahmagupta 布拉玛古夫塔 114,294
Briggs 344-347
G. Brunel 189
Plato 柏拉图 193,194,294
Proclus 普罗克洛斯 294
福田理轩 107,179,187,188,216,243,242
藤冈茂之 30,104,205,328,330
藤田贞资 89,146,294,304,357
藤原通宪 4,325,326
藤原为光 78
藤原松雄 78
藤原松三郎 425
藤原贞干 167
不破仙九郎 25,213
不朽算法 342,343
武江年表 229
正负 323
不定时法 149,153
覆面算 361
二珠算盘 316
符帐 183
孪生素数 366

Hegesippus 黑格西帕斯 6
Hermes 海尔梅斯 252,253
Bacon 培根 198
Bede 彼得 59
Bernoulli 贝努利 273,278
弁庆 187,188
彼得问题 59
别齐和不等式 299
贝努利数 277
变形的药师算 24

Whewell 390
Hobbes 霍布斯 200
White 106
Ball 波尔 33,373,394,424,425,427
Poisson 波松 35
Poincaré 庞加莱 202
Pope 泡普 199
Poulet 369
穆尼阁 346

星野实宜　134,135
堀池久道　146
方阵的史话　22
宝历历　154
卜辞通算　168
发心集　325
本朝神仙要术　215
本朝度量权考　168
Whewell　博士难题　390
方(法)　182
方锥体积　270
方程　28,180
方程式　181

Mersenne　梅森　369
Maxwell　麦克斯韦　200
Mascheroni　玛斯克罗尼　236,238
Matteo Ricci　利玛窦　179,207
Mahavira　294
Marre　426
前田利家　311
松永良弼　18,356
枕草子　150,152
松尾外集　309
万用不求算　137
万叶集　80-82,84
满蒙之文化　429
梅森数　369
继子立　1
枡　162
枡形拾　244
魔法卡　121

Muller　米勒　351
三浦按针　31
三上义夫　78,192,426
源为宪　78
源义经　186-188

村中中渐　3,4,12,49,50,85,187,424
村濑义益　142,288
村松茂清　16
虫食算的故事　362
武者枡　165
室町时代的田租　168
虫食算　357

明治前日本数学史　140,426
填数字　121
女子平方　336

Montucla　蒙丢克拉　209
最上德内　147
毛利重能　29,90,91,137,164,309,310

百川治兵卫　164,319
白川忠兵卫　318,319
孟子　96
Mosaic　镶嵌图　258

八木奘三郎　429,430
柳泽退藏　179
薮内清　351
山口隆二　158
山路主住　18,377,378
山田孝雄　78,310,317
山田正重　45,57,138,205,209,270,319
约数　76,364,369
药师算　22

Euclid　欧几里得　116,179,193,201,294,350,364
游学往来　4,22

吉田兼好　1,8
吉田光由　22,29,40,42,45,52,90,91,94,128,129,132,137,141,172,173,2 220,287,328,425
义经　186--188

Leibniz　莱布尼兹　125,195,247

Lacroix　349
Lagrange　拉格朗日 372
Russell　罗素　195,202,399
Rabbi　5,7
罗雅谷　207,353
罗振玉　168
落书　15

Lietzmann　利茨曼　425
利玛窦　179,207
李俨　169,351,426
李淳风　60
李善兰　178
柳亭种彦　20,22,104,227
利拉瓦底　97
柳亭记　20,104,227
令义解　158

Lucas　鲁卡斯　369,424
Legendre　勒让德尔　369
Lusin　鲁金　218,219

Reinhold　列因霍德　352
Leonardo Pisano　斐波那契　52,58,73,424
Lehmer　莱默　363,364,371
Levita　7
Regiomontanus　351
Legouvé　189

Rhaeticus 列铁卡斯 352
历算全书 239
历法及时法 157,158
簾中抄 4,22,127
零的概念 326

Jacob Rho 罗雅谷 207,352
T. Suntara Row 顺塔拉·罗 232,235
炉的问题 220
罗马问题 118
俄罗斯农民的乘法运算 124
漏刻器 150
六十三减算 64

Wylie 伟烈亚力 178
Weierstrass 外尔斯特拉斯 201
Wallis 瓦里斯 125
和汉算法 140
和国智慧较 14,23--25,113,208,213,215,224,225,242,248
倭顺槩 4
割算书 29,90,137,164,309,310,312,317,320

[General Information]
书名=东西数学物语作者：[日]平山谛著　代钦译
作者=
页数=478
SS号=11394940
出版日期=

封面
书名
版权
前言
目录
正文